企業の判別分析と倒産確率の推定

2009SE168 溝口竜二　2009SE199 中嶋俊介

指導教員：澤木勝茂

1　はじめに

2007 年のサブプライムローン問題以降, ほとんどの国の株式相場が暴落し, 世界的な金融危機が起こっている. 近年ではギリシャやスペインを始めとした欧州債務危機が起こり, 金融市場の混乱は長期化している. 日本経済は外需への依存が強い産業構造なので, 近年の世界経済の悪化の影響を直接受けるとともに, 歴史的な円高も加わって, 体力の弱い中小企業を中心に倒産の動きが拡大していくと考えている. よって, 銀行などの金融機関は, 企業の行く末を見据え, 今まで以上に慎重に融資を判断しなければならない.

本研究では, 外需に依存している電機業界, 自動車業界, 自動車部品業界の企業の財務データをもとに, その企業の現状と今後の倒産する可能性を考察する.

1.1　データと分析方法について

本研究では [1] にある倒産集計より, 平成 18 年から平成 23 年までの倒産した上場企業を調査し,[2] にある有価証券報告書より, 倒産した企業の財務データを取得した.[3] にある国内株式内の個別銘柄情報より, その他の上場企業の財務データを取得した.[3] にある国内の株式指数より, 平成 24 年 8 月から 10 月までと平成 24 年 12 月 27 日の株価の終値のデータを取得した.

分析方法として,2 変量判別分析, 多変量判別分析, バートレット検定, 線形回帰分析, ロジスティック回帰分析, オプションアプローチを用いた.([4],[5] 参照).

2　判別分析

ある企業に対して, その企業が非デフォルト企業グループとデフォルト企業グループのどちらに分類されるかという問題を考える.

2.1　2 変量判別分析

2 つの共変量 X_1と X_2 を考える.第 k 群 の共変量を $X^{(k)}=(X_1^{(k)},X_2^{(k)})$ とし,$X^{(k)}$ は 2 変量正規分布に従うと仮定する. 各群の母平均ベクトルを $\mu^{(k)}$ とし, 母共分散行列を $\Sigma_{(k)}$ とすれば,$X^{(k)}$ の同時密度関数は

$$f_k(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_{1(k)}\sigma_{2(k)}\sqrt{1-\rho_{12(k)}^2}}\exp\{-\frac{1}{2}D_k^2\} \quad (1)$$

で与えられるとする. ただし,D_k^2 はマハラノビス距離と呼ばれ, 点 x と各群の重心 $\mu^{(k)}$ との距離を表している.$\sigma_{i(k)}^2$ は母分散 $[X_i^{(k)}]$,$\sigma_{ij(k)}$ は母共分散

$$\sigma_{ij(k)}=E\left[(X_i^{(k)}-\mu_i^{(k)})(X_j^{(k)}-\mu_j^{(k)})\right],i\neq j,$$

を表す. 母共分散 $\sigma_{ij(k)}$ は, 共変量の母相関係数 $\rho_{ij(k)}$ を用いると

$$\sigma_{ij(k)}=\sigma_{i(k)}\sigma_{j(k)}\rho_{ij(k)},k=1,2,$$

と書くことができる.

いま, 判別したい企業の共変量が (x_1,x_2) であるとすると,

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2)>f_2(x_1,x_2) \\ \qquad\Rightarrow (x_1,x_2)\text{ は第 1 群に属すると判別} \\ f_1(x_1,x_2)<f_2(x_1,x_2) \\ \qquad\Rightarrow (x_1,x_2)\text{ は第 2 群に属すると判別}\end{cases} \quad (2)$$

となる. 式 (1) に対数をとり, それらの差を計算すると

$$\begin{aligned} Z=&-\frac{1}{2}(D_1^2-D_2^2)-\log\frac{\sigma_{1(1)}}{\sigma_{1(2)}} \\ &-\log\frac{\sigma_{2(1)}}{\sigma_{2(2)}}-\frac{1}{2}\log\frac{1-\rho_{12(1)}^2}{1-\rho_{12(2)}^2}\end{aligned}$$

となる. ここで, 等分散性

$$\Sigma_{(1)}=\Sigma_{(2)} \quad (3)$$

を仮定すると

$$Z=-\frac{1}{2}(D_1^2-D_2^2)=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2 \quad (4)$$

が得られる. ここで, 係数 $\beta_j(j=0,1,2)$ は判別係数と呼ばれ,

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mu_1^{(1)}-\mu_1^{(2)} \\ \mu_2^{(1)}-\mu_2^{(2)}\end{pmatrix} \quad (5)$$

および

$$\beta_0=-\frac{1}{2}\left\{\beta_1(\mu_1^{(1)}+\mu_1^{(2)})+\beta_2(\mu_2^{(1)}+\mu_2^{(2)})\right\} \quad (6)$$

で与えられる.2 つの群の共分散行列が同じ場合には, 式 (4) のように判別の境界は線形式で表される. この判別式は線形判別関数と呼ばれ, スコア Z の符号により判別を行うことができる. すなわち, 判別方式 (2) における判別は

$$\begin{cases} Z>0\Rightarrow (x_1,x_2)\text{ は第 1 群に属すると判別} \\ Z<0\Rightarrow (x_1,x_2)\text{ は第 2 群に属すると判別}\end{cases} \quad (7)$$

という判別方式に帰着される.

2.2　多変量判別分析

多変量判別分析は 2 変量の場合と同様に考えることができる. ここでは,第 k 群 の共変量ベクトルを

$$X^{(k)}=(X_1^{(k)},X_2^{(k)},...,X_m^{(k)}),k=1,2,$$

とし,$X^{(k)}$ は m 変量正規分布に従うと仮定する. 各群の母平均ベクトルを $\mu^{(k)}$ とし, 母共分散行列を $\Sigma_{(k)}$ とすれば,$X^{(k)}$ の同時密度関数は

$$f_k(x_1, x_2, ..., x_m) = \frac{1}{2\pi^{m/2}|\Sigma_{(k)}|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}D_k^2\} \quad (8)$$

で与えられる. ここで $|\Sigma_{(k)}|$ は行列 $\Sigma_{(k)}$ の行列式で,D_k^2 は m 変量マハラノビス距離である.

等分散性 (3) の仮定の下では, 式 (4) と同様の線形判別関数を得ることができる. すなわち, 式 (8) の対数の差をとれば

$$\begin{aligned} Z &= \left(\mathrm{x} - \frac{1}{2}\left(\mu^{(1)} + \mu^{(2)}\right)\right)^{\mathrm{T}} \Sigma^{-1}(\mu^{(1)} - \mu^{(2)}) \\ &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_m x_m \qquad (9) \end{aligned}$$

となり, 判別係数 $\beta_k(k = 0, 1, ..., m)$ は

$$\begin{aligned} \beta &= (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)^{\mathrm{T}} \\ &= \Sigma^{-1}(\mu^{(1)} - \mu^{(2)}) \qquad (10) \end{aligned}$$

および

$$\beta_0 = -\frac{1}{2}(\mu^{(1)} + \mu^{(2)})^{\mathrm{T}}\beta \qquad (11)$$

で与えられる. このように共変量が m 個ある場合でも,2 変量の場合とまったく同じ手続きで線形判別関数 (9) を得ることができる. したがって, 等分散性の仮定の下では, 判別方式は (7) と同様に

$$\begin{cases} Z > 0 \Rightarrow (x_1, x_2, ..., x_m) \text{ は第 1 群に属すると判別} \\ Z < 0 \Rightarrow (x_1, x_2, ..., x_m) \text{ は第 2 群に属すると判別} \end{cases}$$

となる.

3 検定

線形判別関数 (9) を用いるためには, 共変量に正規性と等分散性があることが重要な条件である. 正規性は多変量正規分布に従うことを仮定したいためであり, 等分散性は判別式を線形にするためである.

3.1 正規性の検定

Q-Q プロット図により視覚的に確認する.X 軸を観測値,Y 軸を期待値とし, プロットが直線状に分布していればデータが正規分布に従っていることを表している.

3.2 等分散性の検定

バートレット検定を用いて,2 つの群からなる標本について分散が各群とも等しいかどうかを検定する.

4 分析結果

非デフォルト企業 30 社とデフォルト企業 30 社の群をそれぞれ用意し, 判別分析を用いて, 電機業界, 自動車業界, 自動車部品業界の売上高シェア上位 10 社がどちらの群に属するかを推定する. そして, 得られた分析結果から格付けの推定をする.

4.1 2 変量による判別分析

企業財務データより, 次の 2 つの指標

$$x_1 = \frac{\text{自己資本}}{\text{負債合計}}, x_2 = \frac{\text{売上高}}{\text{総資産}}$$

を共変量とする. 推定された平均ベクトル $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}$ および共分散行列 Σ からスコアは式 (4) より,

$$Z = -4.32 + 0.0971x_1 + 0.0358x_2 \qquad (12)$$

となる.

4.2 5 変量による判別分析

企業財務データより, 次の 5 つの指標

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\text{流動性資産} - \text{流動性負債}}{\text{総資産}} \\ x_2 &= \frac{\text{当期利益} - \text{配当金} - \text{役員給与}}{\text{総資産}} \\ x_3 &= \frac{\text{税引き前利益}}{\text{総資産}} \\ x_4 &= \frac{\text{自己資本}}{\text{負債合計}} \\ x_5 &= \frac{\text{売上高}}{\text{総資産}} \end{aligned}$$

を共変量とする.

共変量 x_1, x_4, x_5 の正規性があることが確認できたが, 共変量 x_2, x_3 の正規性は保証できない結果となった. また, 共変量 x_2 の等分散性も保証できなかった. このデータを基に線形判別関数 (9) を導出しても信頼性は低いかもしれないが, 敢えて計算を行う.

推定された平均ベクトル $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}$ および共分散行列 Σ からスコアは式 (9) より

$$\begin{aligned} Z = -4.9773 &+ 0.0201x_1 - 0.1286x_2 \\ &+ 0.0526x_3 + 0.0931x_4 + 0.0357x_5 \quad (13) \end{aligned}$$

となる.

4.3 判別結果による格付けの推定

2 変量判別分析,5 変量判別分析による判別分析の結果をもとにした格付けと,[7] が公表している 2012 年 3 月 31 日の年次決算における各企業の格付けを比較すると, 表 1〜3 となった.

5 倒産確率の推定

デフォルト確率と財務比率の関係について, 線形関係を想定し, 線形回帰分析を適用する線形確率モデルと, 非線形な関係を想定し, ロジスティック曲線の当てはめを行うロジット (ロジスティック) 回帰モデルの 2 つを用いて, 与信先が 1 年以内にデフォルトする確率を推計する.

本研究では, 非デフォルト企業 30 社, デフォルト企業 20 社の群を用意し電機業界, 自動車業界, 自動車部品業界の売上高シェア上位 10 社の倒産確率を推定する.

表 1　電機業界

	格付け		
企業名	2 変量	5 変量	現状
日立製作所	BB	BB	BB
パナソニック	AA	B	C
ソニー	C	CC	C
東芝	B	BB	BB
富士通	AA	BB	BB
三菱電機	AAA	A	BBB
キヤノン	AAA	AA	BBB
NEC	A	BB	BB
シャープ	BB	CCC	CC
富士フイルム HD	AAA	A	A

表 2　自動車業界

	格付け		
企業名	2 変量	5 変量	現状
トヨタ自動車	A	BBB	BBB
日産自動車	BBB	A	BBB
ホンダ	AAA	A	A
スズキ	AAA	AAA	BBB
マツダ	BBB	CCC	C
三菱自動車工業	BBB	B	CC
ダイハツ工業	AAA	AA	A
富士重工業	A	BBB	BB
いすゞ自動車	A	BBB	BB
日野自動車	AA	BB	BB

表 3　自動車部品業界

	格付け		
企業名	2 変量	5 変量	現状
デンソー	AAA	A	BB
アイシン精機	AA	A	BB
豊田自動織機	AAA	AA	BBB
トヨタ車体	AAA	BBB	BBB
ジェイテクト	A	BB	BB
トヨタ紡織	AAA	A	BB
カルソニック	AA	BB	BB
日本精工	AA	A	A
NTN	BBB	B	BB
豊田合成	A	BB	BBB

5.1　線形確率モデル

線形確率モデルは反応確率 p そのものを共変量 x_j の線形モデル $p = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m$ で表わそうとする回帰モデルであり, 本研究では説明変数が 1 つであるので, 次のように表すことができる.

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i \tag{14}$$

従属変数 Y_i は企業 i のデフォルト・フラグであり,X_i は企業 i の売上高有利子負債比率を示している. また,α は回帰直線の切片,β は回帰係数,ε_i は誤差項をそれぞれ示している. 式 (14) の両辺の期待値を取ることにより, デフォルト確率と財務比率の関係

$$PD_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i \tag{15}$$

を得ることが出来る.

5.1.1　線形確率モデルの分析結果

P-値は「回帰係数が 0 である」確率を示しており,P-値で示す確率が小さいほど, 説明変数として有意に採用できることを意味している. 表 4 より,P-値が 0.236027721 であることから回帰係数はほぼ 0 であると判断できる.

表 4　係数と P-値

	t	P-値
切片	1.200002664	0.236027721
X 値 1	4.800152222	1.5867E-05

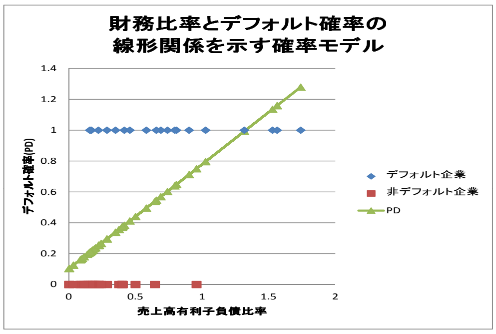

図 1　線形確率モデル

図 1 では横軸に売上高有利子負債比率を, 縦軸にデフォルト確率を取り, この右上がりの直線が式 (15) を意味する.

5.2　二項ロジットモデル

5.2.1　ロジスティック曲線

推定デフォルト確率 PD_i と, 一般に観測できない信用リスク度 $\bar{Z}_i$ との関係に関し, ロジスティック曲線を当てはめると

$$PD_i = \frac{1}{1 + \exp(-\bar{Z}_i)} \tag{16}$$

となる. 信用リスク度 $\bar{Z}_i$ とリスクファクター (売上高有利子負債比率) との間の関係は

$$\bar{Z}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i \tag{17}$$

を想定して, 式 (16) と式 (17) を同時に推定することにより, デフォルト確率 PD_i を推計する.

5.2.2　二項ロジットモデルの分析結果

最尤法は対数尤度の合計が最大となるようなパラメータ (ロジスティック回帰係数, 定数項) を推定するために

Excel ソルバーを使った解法で行い, 信用リスクの大きさである $\bar{Z}_i$ は次のように表現できる.

$$\bar{Z}_i = -2.31767672 + 4.624491217 \times X_{1i}$$

$\bar{Z}_i$ からデフォルト確率へのロジスティック変換は

$$PD_i = \frac{1}{1+\exp(-\bar{Z}_i)} \qquad (18)$$

で示され, 説明変数である売上高有利子負債比率とデフォルト確率の関係をグラフに表した (図 2).

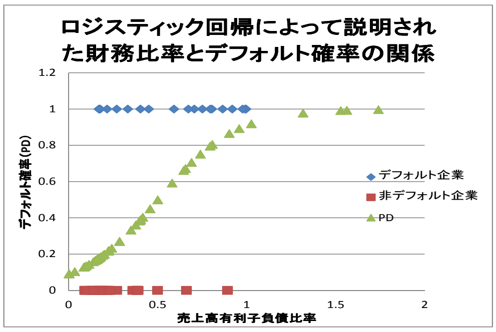

図 2　財務比率とデフォルト確率

次に, デフォルトした企業で検証する.2008 年 2 月に破綻した企業である不動産賃貸借契約の債務保証会社の株式会社リプラスを二項ロジットモデルの推定デフォルト確率モデルで当てはめた場合の結果が次の表 (5) である. この結果より, このモデルの信頼性を検証することができた.

表 5　リプラスのデフォルト確率

定数項 (α)	-2.31767672
説明変数 ($\beta 1$)	4.624491217
推定デフォルト確率 PD	0.985787179

6　オプションアプローチによるデフォルト確率の推定

オプションアプローチでは将来の株式価値 (ペイオフ) が 0 になる状態, すなわち企業資産価値が負債額面を下回る債務超過の状態を倒産と定義する．将来時点 (T 時点) に企業資産価値 ($\tilde{A_T}$) が負債額面 ($\tilde{D_T}$) を下回っていれば, その時点で企業が倒産していると考える.

企業のデフォルト確率 PD は $\tilde{A_T}$ が $\tilde{D_T}$ よりも小さくなる確率 $Pr^P(\tilde{A_T} < \tilde{D_T})$ と表現される．次に, 企業資産の瞬間的な収益率 ($d\tilde{A}_t/A_t$) がブラウン運動に従うことを前提とし,

$$\frac{d\tilde{A}_t}{A_t} = \mu_A dt + \sigma_A \tilde{\varepsilon}\sqrt{dt}$$

この確率微分方程式を解くと, 将来時点 (T 時点) の企業資産価値は, 対数正規分布に従う確率変数として以下のように表現できる.

$$\tilde{A}_t = A_0 \exp\left\{(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2})T + \sigma_A \tilde{\varepsilon}\sqrt{T}\right\}$$

観測時点の企業資産価値を A_0, 企業資産の瞬間的な収益率を μ_A, そのボラティリティを σ_A, 標準正規分布に従う確率変数を $\tilde{\varepsilon}$ とし, 将来の企業資産価格 $\tilde{A_T}$ を表現することによって, デフォルト確率 PD は

$$PD^P(T) = Pr^P(\tilde{A_T} < D_T | A_0) = N(-d_2^P)$$

ここで

$$d_2^P \equiv \frac{\log_e\left(\frac{A_0}{D_T}\right) + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}$$

となる.

6.1　業界別企業のデフォルト確率の分析結果

3 業界 (電機業界, 自動車業界, 自動車部品業界) で, 線形回帰モデル, ロジスティック回帰モデルのデフォルト確率が最上位だった企業を抽出し, 各企業のデフォルト確率を推定した (表 6).

表 6　オプション・アプローチで推定したデフォルト確率

企業名	デフォルト確率
シャープ	16.742
日野自動車	0.000
NTN	3.058

7　おわりに

現実に, デフォルトする企業というのは非デフォルト企業と比べて極めて少ない. そのため, 従業員数や事業規模に偏りができてしまう. また, 経済は予測不可能な状況が多数発生しうるので, 機械的に処理するのは困難な部分がある. この問題は根本的な解決策はないが, 基本的には良質でカバー数の多いデータベースを持つことが今後の課題である.

参考文献

[1] 帝国データバンク,http://www.tdb.co.jp/index.html

[2] EDINET,http://info.edinet-fsa.go.jp/

[3] ロイター,http://jp.reuters.com/

[4] 木島正明・小守林克哉 :『信用リスク評価の数理モデル』. 朝倉書店, 東京,1999.

[5] 森平爽一郎 :『信用リスクの測定と管理』. 中央経済社, 東京,2011.

[6] E.I.Altman(1968), “Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy” ,*Journal of Finance*,23,589-609.

[7] EDIUNET,http://ediunet.jp/