出力フィードバックによるフォーメーション

2009SE075 井上陽介　2009SE116 桔梗祐太　2009SE256 下出拓弥
指導教員：市川　朗

1　はじめに

本研究では出力フィードバックを用いて円軌道上の主衛星とその近傍の従衛星のフォーメーションについて考える．円軌道上の主衛星とその近傍の従衛星の相対運動の方程式は，時不変非線形微分方程式で与えられる．原点で線形化した方程式は Hill-Clohessy-Wiltshire 方程式とよばれ，軌道面内の運動は楕円で表される周期解をもつ．軌道面外の運動は単振動の方程式により表される．状態フィードバック制御を用いた人工衛星の制御は，全ての状態が観測可能であるという条件があるが，状態が一部不可能な場合もある．この場合，出力フィードバックを用いて制御を行う．

人工衛星の操作量と観測量から状態変数を推定するオブザーバーを使った出力フィードバック制御を用いて，フォーメーション形成・再構成問題を定式化する．ここでの評価関数は燃料消費を表す総速度変化とする．10 周期程度で収束するフィードバックゲインとオブザーバゲインを求めて，状態フィードバックに近い制御を行うことを目標とする．なお，人工衛星が目標軌道に収束する条件をストッピングルールとする．

2　相対運動の方程式

半径 R_0 の円軌道上の主衛星とその近傍の従衛星の相対運動を考えるため，主衛星の重心を原点とする図 1 の回転座標系 $o-\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ を考える．

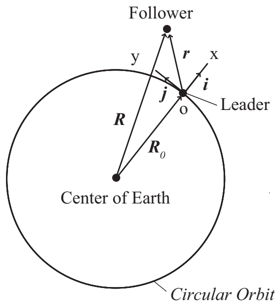

図 1　円軌道上の主衛星

地球と人工衛星の間に働く万有引力は

$$m\ddot{\boldsymbol{R}} = -\frac{GMm}{R^3}\boldsymbol{R} \tag{1}$$

と表される．ここで，m は人工衛星の質量，M は地球の質量，G は万有引力定数，$\boldsymbol{R}$ は地球の中心から人工衛星 (図 1 での従衛星) までの位置ベクトルを示す．(1) 式から m を消去し，地球の重力定数 $\mu = GM$ を代入すると，

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = -\frac{\mu}{R^3}\boldsymbol{R} \tag{2}$$

となる．x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，主衛星から従衛星への位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$，地球の中心から主衛星への位置ベクトルを $\boldsymbol{R}_0 = R_0\boldsymbol{i}$，とすると，図 1 より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{R} &= \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{r} = (R_0 + x)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

が導出できる．角速度を n とすると，単位ベクトル $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ は

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{i}} &= n\boldsymbol{j}\\ \dot{\boldsymbol{j}} &= -n\boldsymbol{i}\\ \dot{\boldsymbol{k}} &= 0\end{aligned}$$

と表される．$\boldsymbol{R}$ を時間 t で 2 回微分した式は

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = [\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2(R_0 + x)]\boldsymbol{i} + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y)\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k} \tag{3}$$

となる．

ここで，(2) 式に従衛星に働く推力 $u = [u_x, u_y, u_z]^T$ を含めた次式

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = -\frac{\mu}{R^3}\boldsymbol{R} + \boldsymbol{u} \tag{4}$$

を考える．推力のベクトル $\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k}$ として，式 (3) と式 (4) を単位ベクトル $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ で係数比較すると，

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2n\dot{y} + n^2(R_0 + x) - \frac{\mu}{R^3}(R_0 + x) + u_x\\ \ddot{y} &= -2n\dot{x} + n^2 y - \frac{\mu}{R^3}y + u_y\\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{R^3}z + u_z\end{aligned} \tag{5}$$

が得られる．(5) 式を原点 $x = y = z = 0$ で線形化すると

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2 x &= u_x\\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= u_y\\ \ddot{z} + n^2 z &= u_z\end{aligned} \tag{6}$$

となる．(6) 式は Hill-Clohessy-Wiltshire(HCW) 方程式とよばれる．推力を $\boldsymbol{u} = 0$, 初期値を $[x_0\ y_0\ \dot{x}_0\ \dot{y}_0]^T$ とする面内運動の解は

$$\begin{aligned}x(t) &= 4x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n} - \left(3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n}\right)\cos nt + \frac{\dot{x}_0}{n}\sin nt\\ y(t) &= y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{n} + \frac{2\dot{x}_0}{n}\cos nt + \left(6x_0 + \frac{4\dot{y}_0}{n}\right)\sin nt\\ &\quad - (6nx_0 + 3\dot{y}_0)t\\ \dot{x}(t) &= \dot{x}_0\cos nt + (3nx_0 + 2\dot{y}_0)\sin nt\\ \dot{y}(t) &= (6nx_0 + 4\dot{y}_0)\cos nt - 2\dot{x}_0\sin nt - (6nx_0 + 3\dot{y}_0)\end{aligned} \tag{7}$$

で与えられる [3][5]．初期値を $[z_0\ \dot{z}_0]^T$ とする面外運動の解は

$$
\begin{aligned}
z(t) &= z_0 \cos nt + \frac{\dot{z}_0}{n} \sin nt \\
\dot{z}(t) &= -n z_0 \sin nt + \dot{z}_0 \cos nt
\end{aligned} \tag{8}
$$

であり，周期解となる．(7) 式，(8) 式の解をパラメータ表現すると

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 2c + a\cos(nt+\alpha), \\
y(t) &= d - 3nct - 2a\sin(nt+\alpha), \\
z(t) &= b\cos(nt+\beta).
\end{aligned} \tag{9}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
& a = \left[(3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n})^2 + \frac{\dot{x}_0}{n}^2 \right]^{\frac{1}{2}},\ b = [z_0^2 + \frac{\dot{z}_0}{n}^2]^{\frac{1}{2}} \\
& c = 2x_0 + \frac{\dot{y}_0}{n},\ d = y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{n} \\
& \sin\alpha = -\frac{\dot{x}_0}{na},\ \cos\alpha = -\frac{3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n}}{a} \\
& \sin\beta = -\frac{\dot{z}_0}{nb},\ \cos\beta = \frac{z_0}{b}
\end{aligned}
$$

より，面内運動は $c = 2x_0 + \frac{\dot{y}_0}{n} = 0$ のとき周期解となり，この条件を CW 条件という．次に

$$
\begin{aligned}
& \mu = 398600[\mathrm{N}],\ R_e = 6.39 \times 10^3[\mathrm{km}] \\
& R_0 = Re + 400[\mathrm{km}]
\end{aligned}
$$

とおくと，n は

$$
n = \sqrt{\frac{\mu}{R_0^3}} = 1.1 \times 10^{-3}[\mathrm{km/s^2}]
$$

と表される [1][2].

一般に状態空間表現は

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u},\ \ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \\
\boldsymbol{y} &= C\boldsymbol{x}
\end{aligned} \tag{10}
$$

で表される．(6) 式を，(10) 式で表すと行列 A,B,C は

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n^2 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

となる．次に出力フィードバック制御について考える. 観測値$\boldsymbol{y}$に基づく状態の推定を考える．推定システムを元のシステムである (10) 式を模倣した動的システム

$$
\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = A\hat{\boldsymbol{x}} + B\boldsymbol{u} + H(\boldsymbol{y} - C\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{11}
$$

とする．このときの推定誤差を $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}$ とすると

$$
\dot{\boldsymbol{e}} = (A - HC)\boldsymbol{e} \tag{12}
$$

となる．$A - HC$ が安定であるとき，$e(t)$ は漸近的に 0 に収束する．このとき推定システムをオブザーバー (状態観測器) といい，H をオブザーバーゲインという.

ここで，$\boldsymbol{u} = -K\hat{\boldsymbol{x}}$ として，式 (10) に代入すると

$$
\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} - BK\hat{\boldsymbol{x}}. \tag{13}
$$

$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}$ より，式 (13) に代入して変形すると

$$
\dot{\boldsymbol{x}} = (A - BK)\boldsymbol{x} + BK\boldsymbol{e}. \tag{14}
$$

式 (12) と式 (14) を拡大行列系で表すと

$$
\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BK & BK \\ O & A - HC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{e} \end{pmatrix}
$$

この系の固有値は $\sigma(A - BK) \cup \sigma(A - HC)$ であるから安定となる．出力フィードバックによって安定化を行うには状態フィードバック K とオブザーバーゲイン H を独立に設計すればよい．これを安定化補償器 (制御器) 設計の分離原理という．オブザーバーと元のシステムの次元が同じであるとき同一次元オブザーバーという.

3　状態フィードバックの安定化

10 周期前後で収束するフィードバックゲイン K を求める．(9) 式に

$$
a = 5, b = 1, c = 0, d = 0
$$

を代入して，システムの初期値 $\boldsymbol{x}_0$ を

$$
\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 5\cos\alpha \\ -10\sin\alpha \\ -5.50 \times 10^{-3}\sin\alpha \\ -5.50 \times 10^{-3} - 1.10 \times 10^{-2}\cos\alpha \\ -1.10 \times 10^{-2}\cos\beta \\ -1.10 \times 10^{-3}\sin\beta \end{bmatrix}
$$

とする．ここで，α は初期値を定める角度であり，この α を $\frac{\pi}{2}$ ごとに変えていく．β は面外運動の座標を決める任意の角度である．目標軌道 $\boldsymbol{x}_f$ の初期値は

$$
a = 0.5, b = 0
$$

とおき

$$
\boldsymbol{x}_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ -5.50 \times 10^{-4}\sin\alpha \\ -1.10 \times 10^{-3}\cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

に設定する．$\dot{\boldsymbol{x}}_f$ の方程式は

$$
\dot{\boldsymbol{x}}_f = A\boldsymbol{x}_f, x_f(0) = x_{f0} \tag{15}
$$

となる．目標軌道とシステムの誤差を $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_f$ とすると $\dot{\boldsymbol{e}}_1 = \dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{x}}_f$ となり，式 (10) の $\dot{\boldsymbol{x}}$ と式 (15) から

$$\dot{\boldsymbol{e}}_1 = A\boldsymbol{e}_1 + B\boldsymbol{u}$$

となる．制御入力$\boldsymbol{u}$を

$$\boldsymbol{u} = -K(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_f) = -K\boldsymbol{e}_1$$

とし，フォーメーションを行う．

$A - BK$ を安定化させるため，最適レギュレータのリッカチ方程式を解く．

$$\begin{aligned} &A^T X + XA + Q - XBR^{-1}B^T X = 0 \\ &K = R^{-1}B^T X \end{aligned} \tag{16}$$

(16) 式はフィードバックゲイン K を与えるリッカチ方程式である．(A,B) が可制御のとき，安定となるフィードバックゲイン K を求めることができる．この時のフィードバックゲイン K の設計を $Q = 10^{-7}I$ に固定し，操作量の重み $R = 10^r I$ の r を 4 から 8 まで 0.125 刻みで動かして設計する．ストッピングルールを「目標軌道と人工衛星との誤差が時刻刻みで 3 回連続 10^{-2} 以下に収まったら収束した」と決める．$\alpha = 0$ 及び $\alpha = \pi$ のときの L_1 ノルムのシミュレーション結果を図 2,3 に，整定時間 st のシミュレーション結果を図 4,5 に表示する．

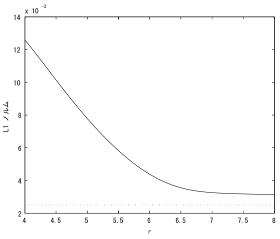

図 2　L_1 ノルム ($\alpha = 0$)

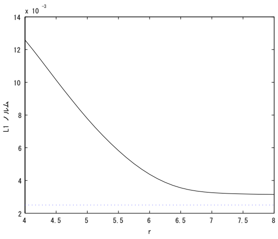

図 3　L_1 ノルム ($\alpha = \pi$)

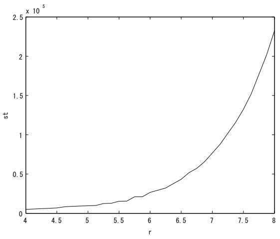

図 4　$st(\alpha = 0)$

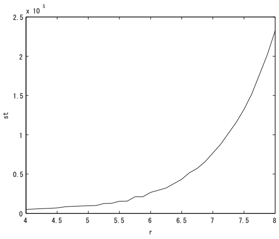

図 5　$st(\alpha = \pi)$

L_1 ノルムは燃料消費を表す評価関数であり，単調に減少していく [2][5]．r を大きくすることで，操作量が過大でないことを表す．4 つの図を見ると，$\alpha = 0$ と $\alpha = \pi$ のときのグラフはほぼ一致していることがわかる．図 4,5 から，10 周期近くで収束する st の値

$$st = 5.73 \times 10^4 [\mathrm{s}]$$

となり $r = 6.75$ のときに得られた．図 2,3 から L_1 ノルムは

$$L_1 = 3.36[\mathrm{m/s}]$$

となった．α の角度がちょうど π だけずれており，反対側から目標軌道までの楕円運動を同じ距離で行うので，r, st, L_1 ノルムが同じ値になった．

また，$\alpha = \frac{\pi}{2}$ 及び $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ のときの L_1 ノルムのシミュレーション結果を図 6,7 に，整定時間 st のシミュレーション結果を図 8,9 に表示する．

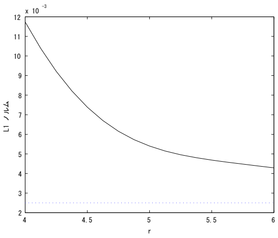

図 6　L_1 ノルム ($\alpha = \frac{\pi}{2}$)

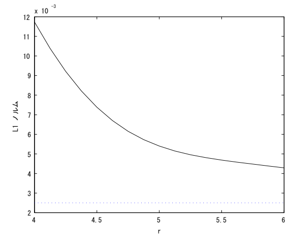

図 7　L_1 ノルム ($\alpha = \frac{3\pi}{2}$)

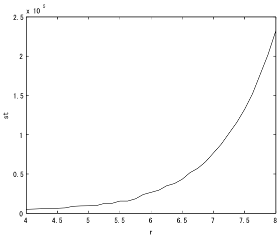

図 8　$st(\alpha = \frac{\pi}{2})$

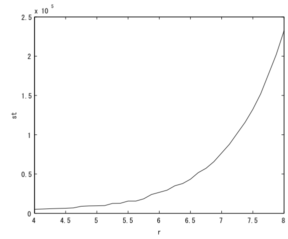

図 9　$st(\alpha = \frac{3\pi}{2})$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ と $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ のときのグラフもほぼ一致している．10 周期前後で収束する st の値は図 8,9 から

$$st = 5.73 \times 10^4 [\mathrm{s}]$$

となり，$r = 6.75$ のときに得られた．図 6,7 から L_1 ノルムは

$$L_1 = 3.70[\mathrm{m/s}]$$

となった．楕円運動で $\frac{\pi}{2}$ ずれると目標軌道までの距離が変わり，$\alpha = 0, \pi$ のときと比べて L_1 ノルムの値も小さいので，$\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ のときの方が距離が小さいと分かる．よって，初期軌道から目標軌道までの面内運動の移動距離は $\alpha = 0, \pi$ のときが最も長く，$\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ のときが最も短いと言える．角度 α の各値から r を決定したことにより一意に Q と R が得られたので，(16) 式からフィードバックゲインは

$$K = \begin{bmatrix} 9.29e-7 & -8.72e-8 & 3.03e-4 & 3.62e-4 & 6.10e-22 & -6.85e-19 \\ 2.50e-6 & -1.09e-7 & 3.62e-4 & 1.10 & 3.28e-21 & 2.47e-18 \\ 5.31e-21 & -2.80e-22 & -6.85e-19 & 2.47e-18 & 6.96e-9 & 1.18e-4 \end{bmatrix}$$

と定まった．フィードバックゲインの各成分は非常に小さく 0 に近いものとなり，入力も非常に小さい値になっていることが分かる．角度 α が $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 以外で値をとっても上記のフィードバックゲインをとる．

4　オブザーバーゲインの決定

10 周期近くで収束するオブザーバーゲイン H を決める．目標値は前章の値を使い，オブザーバーの初期値は

元のシステムの速度成分を± 10% 変化させたものとして，それぞれ

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{+10\%} = \begin{bmatrix} 5\cos\alpha \\ -10\sin\alpha \\ -6.05\times10^{-3}\sin\alpha \\ -1.21\times10^{-2}\cos\alpha \\ \cos\beta \\ -1.21\times10^{-3}\sin\beta \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{-10\%} = \begin{bmatrix} 5\cos\alpha \\ -10\sin\alpha \\ -4.95\times10^{-3}\sin\alpha \\ -9.90\times10^{-3}\cos\alpha \\ \cos\beta \\ -9.90\times10^{-3}\sin\beta \end{bmatrix}$$

とおく．出力フィードバックと目標軌道の誤差を

$$\boldsymbol{e}_2 = \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}_f$$

とすると，

$$\dot{\boldsymbol{e}}_2 = A\boldsymbol{e}_2 + B\boldsymbol{u} + H(\boldsymbol{y} - C\hat{\boldsymbol{x}})$$

となる．出力フィードバック制御の入力を

$$\boldsymbol{u} = -K(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}_f) = -K\boldsymbol{e}_2$$

として，フォーメーションを行う．$A - HC$ を安定化させるためには，$A^T - C^TH^T$ を安定化させる最適レギュレータのリッカチ方程式を解けばよい．

$$\begin{aligned} &AY + YA^T + Q_1 - YC^T{R_1}^{-1}CY = 0 \\ &H^T = {R_1}^{-1}CY \end{aligned} \qquad (17)$$

(17) 式は Y を解とする H^T のリッカチ方程式で，安定となる H^T から H を得られる．オブザーバーゲイン H の設計を $Q_1 = 10^{-7}I$ に固定し，操作量の重み $R_1 = 10^{r_1}I$ の r_1 を 2 から 9 まで動かして設計する．ストッピングルールを「人工衛星と目標軌道との差が 10^{-2} 以下に各時刻ごとに 3 回連続で入れば収束した」とみなす．L_1 ノルムが 4.00[m/s] 以下でかつ状態フィードバックの性能に近づけられたら良いオブザーバーと評価する．初期値の速度成分が 1 割増の場合において，$\alpha = 0, \pi$ のときの L_1 ノルムのシミュレーション結果を図 10,11 に，整定時間 st のシミュレーション結果を図 12,13 に表示する．

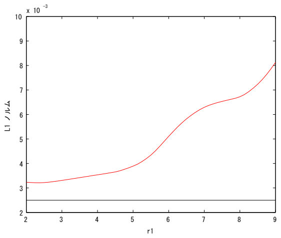

図 10　L_1 ノルム $(\alpha = 0)$

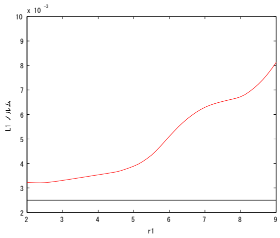

図 11　L_1 ノルム $(\alpha = \pi)$

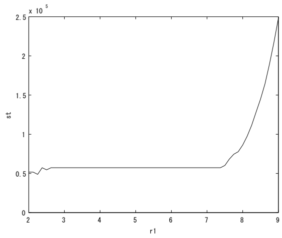

図 12　st$(\alpha = 0)$

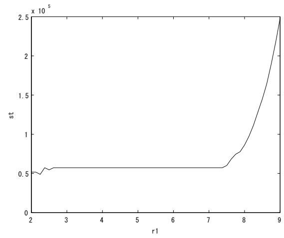

図 13　st$(\alpha = \pi)$

$\alpha = 0$ と $\alpha = \pi$ のグラフはほぼ一致する．図 12, 図 13 より，$r1$ が $2.5 \leqq r_1 \leqq 7.25$ の範囲なら状態フィードバック制御を用いた場合の st と L_1 ノルムに近い値をとる．図 10,11 より，L_1 ノルムは $\alpha = 0, \pi$ で誤差が+10% のとき，図 12, 図 13 より,L_1 ノルムが低い値の r_1 を選べばよい．

同様に $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ のときの L_1 ノルムのシミュレーション結果を図 14,15 に，整定時間 st のシミュレーション結果を図 16,17 に表示する．

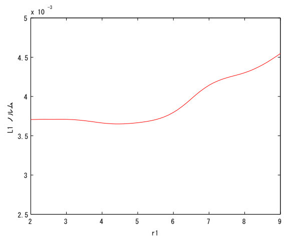

図 14　L_1 ノルム $(\alpha = \frac{\pi}{2})$

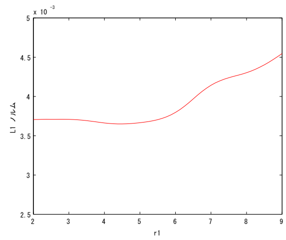

図 15　L_1 ノルム $(\alpha = \frac{3\pi}{2})$

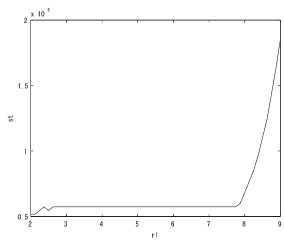

図 16　st$(\alpha = \frac{\pi}{2})$

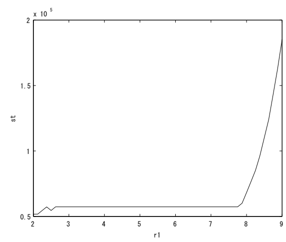

図 17　st$(\alpha = \frac{3\pi}{2})$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ や $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ のときのグラフもほぼ同じ形をしている．図 14,15 より，$\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ で誤差が-10% のとき，L_1 ノルムの最小値は

$$\text{最小値} : L_1 = 3.66[\mathrm{m/s}]$$

となる．$r_1 = 6.75$ のとき $L_1 = 4.00$[m/s] より大きくなる．上記のことと図 16,17 より $2.5 \leqq r_1 < 6.75$ の範囲の値を選べばよい．

次に，初期値の速度成分を 1 割減にした場合において，$\alpha = 0$ 及び $\alpha = \pi$ のときの L_1 ノルムのシミュレーション結果を図 18,19 に表示し，整定時間 st のシミュレーション結果を図 20,21 に表示する．

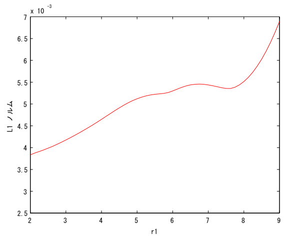

図 18　L_1 ノルム $(\alpha = 0)$

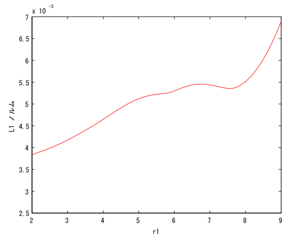

図 19　L_1 ノルム $(\alpha = \pi)$

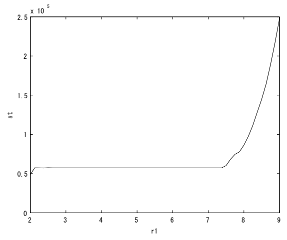

図 20　$st(\alpha = 0)$

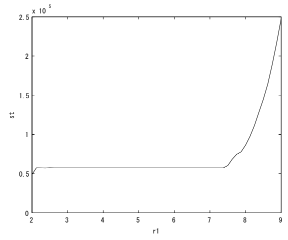

図 21　$st(\alpha = \pi)$

$\alpha = 0$ のときと $\alpha = \pi$ のときのグラフはほとんど一致していることが見られた．図 18,19 より，$\alpha = 0, \pi$ で誤差が-10% のとき，L_1 ノルムが低い値の r_1 を選べばよい．図 20,21 より，r_1 が $2.12 \leqq r_1 \leqq 7.37$ の範囲なら状態フィードバック制御を用いた場合の st と L_1 ノルムに近い値をとる．

同様に $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ の場合における L_1 ノルムのシミュレーション結果を図 22,23 に，整定時間 st のシミュレーション結果を図 24,25 に表示する．

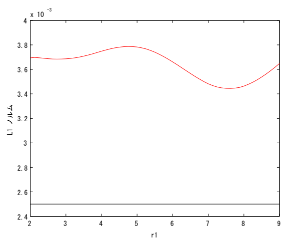

図 22　L_1 ノルム $(\alpha = \frac{\pi}{2})$

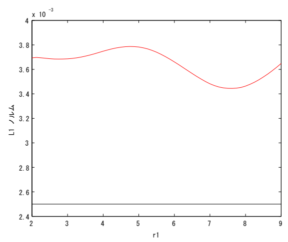

図 23　L_1 ノルム $(\alpha = \frac{3\pi}{2})$

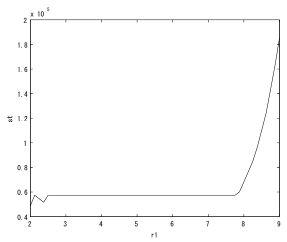

図 24　$\mathrm{st}(\alpha = \frac{\pi}{2})$

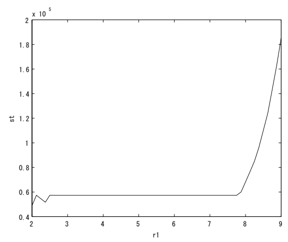

図 25　$\mathrm{st}(\alpha = \frac{3\pi}{2})$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ と $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ のグラフも形はほぼ同じになった．図 22,23 より，$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ で誤差が+10% のとき，L_1 ノルムの最小値, 最大値は

$$\text{最小値} : L_1 = 3.45[\mathrm{m/s}]$$

$$\text{最大値} : L_1 = 3.79[\mathrm{m/s}]$$

となり，L_1 ノルムの誤差の範囲内なので図 24,25 より,, $2.5 \leqq r_1 \leqq 7.75$ の範囲の値を選べばよい．角度 α による L_1 ノルムの値から，目標までの楕円軌道の運動をする人工衛星の移動距離は，$\alpha = 0, \pi$ のときが最短になり，$\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ のときが最長になることが分かった．$\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ のどの点からも収束する H の設計をしたいので $r_1 = 2.5$ のときにどの点でも $L_1 = 4.07[\mathrm{m/s}]$ を下回り，状態フィードバック制御を用いたときの st に近い値をとる $r1$ の値は

$$r_1 = 2.5$$

となる．$r_1 = 2.5$ のときの L_1 ノルムと整定時間 st は以下の表のようになる．

表 1　±10% の比較

α	誤差	r_1	L_1	st
$0, \pi$	-10%	2.5	3.99[m/s]	5.74×10^4[s]
$0, \pi$	+10%	2.5	3.22[m/s]	5.42×10^4[s]
$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	-10%	2.5	3.69[m/s]	5.74×10^4[s]
$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	+10%	2.5	3.71[m/s]	5.46×10^4[s]

以上の表より $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ のどの点からも収束する r_1 は $r_1 = 2.5$ となる. そのときのオブザーバーゲイン H は

$$H = \begin{bmatrix} 0.64e-1 & -1.24e-4 & -9.28e-19 \\ -1.24e-4 & 5.80e-3 & 1.17e-20 \\ 2.03e-5 & 6.09e-6 & 2.55e-22 \\ -7.60e-6 & 1.67e-5 & 1.72e-21 \\ -9.28e-19 & 1.73e-20 & 5.80e-3 \\ -5.52e-22 & -9.80e-22 & 1.66e-5 \end{bmatrix}$$

となった．オブザーバーゲインの各値も非常に小さい値が多く，出力フィードバックの操作量が少ないことが分かった．ただし，L_1 ノルムは 1 割増の方が小さくなったので操作量自体は 1 割増の方が小さくなる．

目標までの楕円軌道運動による移動距離は，L_1 ノルムから $\alpha = 0, \pi$ のときが最長で，$\alpha = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ のときが最短になる．よって，誤差を含めた $\alpha = 0, \frac{3\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{2}$ 以外のすべての角度 α でも上記のオブザーバーゲインを得られる．

オブザーバーゲインを求める際に初期速度成分を 1 割減しても 1 割増しても L_1 ノルムは 4.00[m/s] 以内に収まり，かつ収束時間も 10 周期前後になったため，どの角度 α でも有効なオブザーバーを用いることができると分かった．

5 出力フィードバックによる軌道制御

前章で得られたフィードバックゲイン K とオブザーバーゲイン H を用いてシミュレーションし軌道制御を行う. 1 割増にした場合の角度 $\alpha = 0, \frac{3\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{2}$ のときの制御軌道をそれぞれ図 26,27.28,26 に表示する.

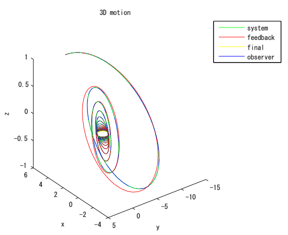

図 26 制御軌道 ($\alpha = 0$)

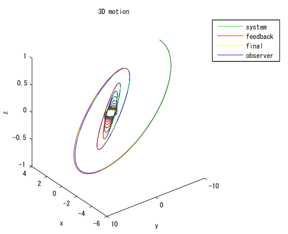

図 27 制御軌道 ($\alpha = \frac{\pi}{2}$)

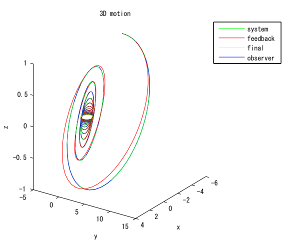

図 28 制御軌道 ($\alpha = \pi$)

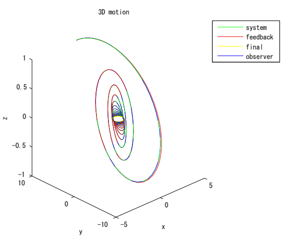

図 29 制御軌道 ($\alpha = \frac{3\pi}{2}$)

図 26,27,28,29 から，状態フィードバック制御と出力フィードバック制御の軌道がほぼ同じであることが分かる. L_1 ノルムや整定時間の条件を満たしたオブザーバーで軌道修正も状態フィードバックに近似できた.

次に，速度成分を 1 割減にしたものをそれぞれ図 30,31,32,33 に表示する.

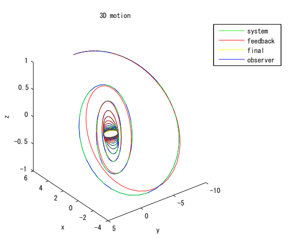

図 30 制御軌道 ($\alpha = 0$)

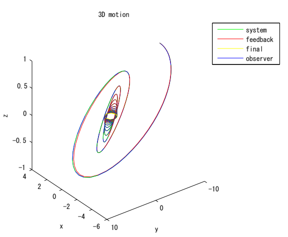

図 31 制御軌道 ($\alpha = \frac{\pi}{2}$)

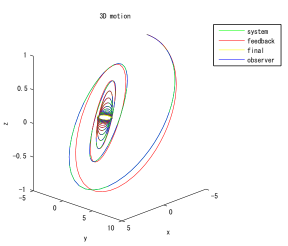

図 32 制御軌道 ($\alpha = \pi$)

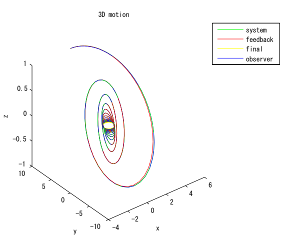

図 33 制御軌道 ($\alpha = \frac{3\pi}{2}$)

こちらも同様に状態フィードバック制御とほぼ同じ軌道を構成することができた．各軌道を見比べると，角度 α で初期位置は異なるものの，目標軌道までの人工衛星の動きも x, y 軸の平面において角度 α だけ異なるものだと分かる．また，初期値の速度成分を誤差の範囲が ±10% 以内なら初期値を変えても r と r_1 の値は変わらず, 収束時間が変化するだけで軌道そのものに変化はないと見られた.

誤差がシステムの初期値の速度成分成分に ±10% なら初期値がどこからでも制御できる K と H が決まり, 状態フィードバックと同じようにオブザーバーを用いても制御できることが分かった.

6 終わりに

誤差が ±10% 以内ならどこからでも L_1 ノルムが $L_1 = 4.000$[m/s] 以下で収束するオブザーバーゲインを求め, 状態フィードバック制御とオブザーバーを用いた出力フィードバック制御の比較を行った. システムの初期値 $\boldsymbol{x}_0$ の α を $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ の 4 点を与え, オブザーバーを用いたシステムの初期値を速度成分に誤差を ±10% に設定し,L_1 ノルムが $L_1 = 4.00$[m/s] 以下で収束するオブザーバゲイン H を求めた. 初期値や誤差に関わらず収束させるフィードバックゲイン K の r の値は $r = 6.75$ になった. 初期値や誤差に関わらず収束させるオブザーバーゲイン H の r_1 の値は $r_1 = 2.5$ になった.

制御軌道図より, 出力フィードバック制御を用いても状態フィードバック制御と同じような軌道を描いているので 4 点の初期値の全てから同じ r_1 を用いて制御でき,α の値に関わらず誤差が速度成分の ±10% ならオブザーバーを用いた出力フィードバックでも状態フィードバックと同じように制御できる.

参考文献

[1] M. Bando and A. Ichikawa:Formation Flying Along a Circular Orbit with Control Constraints, Proceedings of AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Alaska, AAS 11-491, 2011.

[2] A. Ichikawa:Null Controllability with Vanishing Energy for Discrete-Time Systems, Systems & Control Letters, Vol. 57, No. 1, pp. 34-38, 2008.

[3] A. Ichikawa:Recent Developments in Formation Flying, Lecture Notes ver.1, 2010.

[4] R. Jifuku, A. Ichikawa and M. Bando:Satellite Formation by Pulse Control Along a Circular Orbit, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 34, No. 5, pp. 1329-1341, 2011.

[5] M. Shibata and A. Ichikawa:Orbital Rendezvous and Flyaround Based on Null controllability with Vanishing Energy, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 30, No. 4, pp. 934-945, 2007.