証明における適用すべき推論の考察

2008MI092 加藤雅也

指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は，証明における各推論が適用された理由を考察し，証明作成の各ステップで適切な推論を選択できるようになることである．

各推論で適用された理由の考察には [1] で紹介されている given-goal table を用いる．この table は使える性質 (given) と導く性質 (goal) の表で，この表の変化で証明を表現できる．すなわち，表の変化の一つ一つが，推論に対応し，変化による表の列が証明に対応する．目的の理由の考察は，表の変化の理由を考えればよいことになる．

卒業論文では，[1] から抽出した 7 つの例題に対して，その考察と実際の証明の記述を行った．本稿では，そのうちの 1 つの例題を扱う．

2　例題

本稿で扱う例題を以下に示す．これを 3 通りの方法で考察する．3 つ目の方法は [1] で述べられた方法である．
例題 ([1]):「x,y,z が整数ならば，$x+y$,$y+z$,$z+x$ のうち少なくとも 1 つは偶数である」を証明せよ．
以下の各節で 3 通りの方法の考え方と実証明を示す．ただし，2.3 節の実証明は [1] で述べられているので，省略する．

2.1　偶数か奇数かで場合分けする方法

使える性質 (given) と導く性質 (goal) の表を作成する．

表 1

given	goal
x,y,z は整数	$x+y$,$y+z$,$z+x$ は 少なくとも 1 つは偶数

goal の「偶数」ということばより x,y,z が偶数か奇数かで場合分けをすることを考える．まず，x で場合分けをすると，次の 2 つの表に分かれる．すなわち，

表 2

given	goal
x,y,z は整数 x は偶数	$x+y$,$y+z$,$z+x$ は 少なくとも 1 つは偶数

表 3

given	goal
x,y,z は整数 x は奇数	$x+y$,$y+z$,$z+x$ は 少なくとも 1 つは偶数

ここでは表 1 対する場合のみ扱う．さらに，y が偶数か奇数かで場合分けをすると，2 つの表に分かれる．すなわち，

表 4

given	goal
x,y,z は整数 x は偶数 y は偶数	$x+y$,$y+z$,$z+x$ は 少なくとも 1 つは偶数

表 5

given	goal
x,y,z は整数 x は偶数 y は奇数	$x+y$,$y+z$,$z+x$ は 少なくとも 1 つは偶数

表 4 では，given の条件から $x+y$ は偶数であり，goal の条件が導かれる．表 5 では，さらに z が偶数か奇数かで場合分けをして goal の条件を導くことができる．
< 実証明 >

x が偶数か奇数かで場合分けして示す．

(1)x が偶数のとき，さらに y が偶数のときと奇数のときに場合分けして示す．

(1.1)y が偶数のとき，$x+y$ は偶数であり，$x+y$ が奇数であることに矛盾する．

(1.2)y が奇数のとき，z が偶数か奇数かで場合分けして示す．

(1.2.1)z が偶数のとき，$z+x$ は偶数となり，$z+x$ が奇数であることに矛盾する．

(1.2.2)z が奇数のとき，$y+z$ は偶数となり，$y+z$ が奇数であることに矛盾する．

(2)x が奇数のときは (1) と同様なので，省略する．

2.2　和が奇数であれば偶奇性が異なるを用いた方法

最初は表 1 と同じである．ここから始める．

goal の「少なくとも」ということばより，その否定形の方が考えやすい．そのために背理法を用いて，

表 6

given	goal
x,y,z は整数 $x+y$,$y+z$,$z+x$ は すべて奇数	$\perp$

given の条件から，基本的な式である x,y,z の偶奇性を考えてみる．まず，$x+y$ が奇数より，

表 7

given	goal
x,y,z は整数	$\perp$
$x+y$,$y+z$,$z+x$ は	
すべて奇数	
「x が偶数かつ y が奇数」	
または	
「x が奇数かつ y が偶数」	

given に「または」の文が現れるので，場合分けする．そのうちの x が偶数のときのみを示すと，

表 8

given	goal
x,y,z は整数	$\perp$
$x+y$,$y+z$,$z+x$ は	
すべて奇数	
x が偶数	
y が奇数	

given の x,$z+x$ の偶奇性から z の偶奇性が分かるので，

表 9

given	goal
x,y,z は整数	$\perp$
$x+y$,$y+z$,$z+x$ は	
すべて奇数	
x が偶数	
y が奇数	
z が奇数	

given の y が奇数で z が奇数であることから，$y+z$ は偶数になるので，$y+z$ が偶数と奇数になり，矛盾する．
< 実証明 >
「$x+y$,$y+z$,$z+x$ は少なくとも一つは偶数」の否定，すなわち「$x+y$,$y+z$,$z+x$ はすべて奇数」を仮定する．$x+y$ が奇数より，

「x が偶数かつ y が奇数」

または

「x が奇数かつ y が偶数」

である．　上の場合のみ示す．次の 2 つが成り立つ．

$$x \text{ が偶数である} \tag{1.1}$$

$$y \text{ が奇数である} \tag{1.2}$$

(1.1) と $y+z$ が奇数であることより，

$$z \text{ が偶数である} \tag{1.3}$$

(1.1)，(1.3) を用いて

$$z+x \text{ は偶数}$$

を得るが，これは $z+x$ が奇数であることに矛盾する．

2.3　$x+y$,$y+z$,$z+x$ を全てを足す証明方法．

表 6 から始める．奇数は 2 で割って 1 余る数であることを用いると，given の条件を式で表現できる．すなわち，ある l,m,n が存在して，

表 10

given	goal
x,y,z は整数	$\perp$
$x+y$,$y+z$,$z+x$ は	
すべて奇数	
l,m,n は整数	
$x+y=2l+1$	
$y+z=2m+1$	
$z+x=2n+1$	

3 つの和をとり整理すると (ただし，このステップは思いつきにくいと考える)，

表 11

given	goal
x,y,z は整数	$\perp$
$x+y$,$y+z$,$z+x$ は	
すべて奇数	
l,m,n は整数	
$x+y=2l+1$	
$y+z=2m+1$	
$z+x=2n+1$	
$2(x+y+z)=2(l+m+n+1)+1$	

given の一番下の等式は偶数と奇数は異なることに矛盾する．

3　適切な推論を選択するために

ここでは，適切な推論を選択するためにどのような視点に着目すべきかについて，2 節の例題で用いたものをまとめる．

(1) 基本的な式である x,y,z の偶奇性を考えてみる．
- (1-1)「偶数」ということばより x,y,z が偶数か奇数かで場合分けをする．
- (1-2) 他の情報から x,y,z の偶奇性が導けるかを考えてみる．

(2) 各ステップで使える情報 (given) を増やすことで導きやすくなる．

(3)「少なくとも一つは偶数」を導くことより，これを否定し,「すべて奇数」から情報を導き出す方が考えやすく，適切な推論を選択しやすくなる．

(4)「または」の文が現れたら，場合分けをする．

(5)「奇数は 2 で割って 1 余る数である」こと，すなわち，奇数の定義を用いる．

参考文献

[1] 松井知己,「だれでも証明が書ける」，日本評論社，2010 年，東京