長方形領域の再利用可能積分公式

2008MI020 古田　純也

指導教員：杉浦　洋

1　はじめに

長方形領域における本研究では，適応型積分法を考える．適応型積分法のアルゴリズムは「精度が低いと判定された小長方形を２分する」という操作を繰り返して，必要な精度を達成する．このような数値積分法に用いる効率の良い積分公式を設計することが，本研究の目標である．

この研究は，長方形領域の完全対称再利用公式に関する伊藤の研究 [1] の発展である．

2　FS(Fully Symmetric：完全対称) 集合

基本領域 $\Delta = [-1,1] \times [-1,1]$ をそれ自身に移すアフィン変換 $(x,y) = \varphi(u,v)$ は $\varphi(u,v) = (\pm u, \pm v)$, $(\pm v, \pm u)$ の計 8 個ある．復号 $\pm$ は，変換ごとに自由に選べる．FS 集合は 8 つのアフィン変換で不変な集合である．

点 $\boldsymbol{p} = (x,y) \in \Delta$ を上記 8 個のアフィン変換で移した点全体の集合を

$$\langle \boldsymbol{p} \rangle = \langle x,y \rangle = \{(\pm x, \pm y), (\pm y, \pm x)\}$$

と書き，アトムと呼ぶ．FS 集合はアトムの和集合である．標本点集合が FS 集合である積分公式で，重みが同一アトム内で等しいものを FS 公式と呼ぶ．アトムを単位とするので，同一標本点数の一般の公式と比べ，FS 公式のパラメーター数は少なく，設計も実装も容易となる．

3　FS 則の重みの決定

標本アトム $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，重み $w_1, \cdots, w_n$ の FS 則 Q_n は次のように書ける．

$$Q_n f = \sum_{l=1}^{n} w_l \sum_{\boldsymbol{x} \in \alpha_l} f(\boldsymbol{x}). \tag{1}$$

Q_n(2.4) が s 次則である条件を調べる．

$$I_{kl} = \iint_{\Delta} x^k y^l dxdy = \frac{1+(-1)^k}{k+1} \cdot \frac{1+(-1)^l}{l+1}.$$

と書く．アトム α の (k,l) 次モーメントを

$$m_{k,l}(\alpha) = \sum_{(x,y) \in \alpha} x^k y^l.$$

で定義する．以下の定理が証明された．

定理 1　奇数次単項式 $x^k y^l$ ($k+l$ は奇数) に対して，

$$Q_n(x^k y^l) = \iint_{\Delta} x^k y^l dxdy.//$$

定理 2　$Q_n(x^k y^l) = I_{kl}$ なら $Q_n(x^l y^k) = I_{lk}$ である．//

定理 1 より FS 則が $2k$(偶数) 次則なら，自動的に $2k+1$ 次則である．また定理 2 より次の次数条件が導かれる．

定理 3　$s \geq 1$ が奇数のとき，Q_n が s 次であるための条件は，$x^{2k}x^{2l}$ ($0 \leq k < \frac{s}{2}, 0 \leq l \leq \min\{k, \frac{s-2k}{2}\}$) を正確に積分することである．//

標本アトム $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の重みを $w_1, \cdots, w_n$ とするとき，Q_n が s(奇数) 次であるための条件をもう少し具体的に書けば，$0 \leq< \frac{s}{2}, 0 \leq l \leq \min\left\{k, \frac{s-2k}{2}\right\}$ で，

$$Q_n x^{2k} y^{2l} = \sum_{i=1}^{n} w_i m_{2k,2l}(\alpha_i)$$

$$m_{2k,2l}(\alpha_i) = \sum_{(x,y) \in \alpha_i} x^{2k} y^{2l}. \tag{2}$$

となる．線形方程式 (2) を重み $w_1, \cdots, w_n$ について解いて，s 次則 Q_n が定まる．

4　再利用性

長方形領域 D=$D[a,b] \times [c,d]$ 上での近似積分 $I_n(D)f$ の精度が悪いときは，x 軸あるいは y 軸と平行な直線で小長方形 D_0 と D_1 に２等分し，より精度の高い近似積分

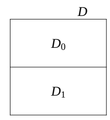

図 1　分割の図

$I_n(D_0)f + I_n(D_1)f \cong Q(D)f$ を得る．この領域分割を D_0, D_1 以下にも再帰的に繰り返し，十分精度の高い近似積分値が得られる．このような領域分割による近似積分法を適用型積分則という．

アトム $\langle \boldsymbol{p} \rangle$ が $I_n(D)$ の標本アトムであるとする．$\langle \boldsymbol{p} \rangle$ の全ての点が $I_n(D_0)$ か $I_n(D_1)$ の標本点にもなっていれば，$\langle \boldsymbol{p} \rangle$ は再利用可能であるという．$I_n(D)$ の全ての標本点が再利用可能であるとき $I_n(D)$ を R(Reusable：再利用可能) 公式と言う．またその標本点集合を R 集合という．R 公式は標本点上で一度計算した関数値が，領域分割の過程で再利用できるため効率的である．

標本アトムの再利用性について次の定理が成り立つ．

定理 4　標本アトム $\langle \xi, \eta \rangle$ が再利用可能であることの必要十分条件は $\langle \xi, \varphi(\eta) \rangle$, $\langle \eta, \varphi(\xi) \rangle$ がともに標本アトムであることである．ここで

$$\varphi(\eta) = |2\eta - 1| \tag{3}$$

である．//

この依存関係をグラフ的に表現し，$\langle \boldsymbol{p} \rangle \to \langle \boldsymbol{p}_i \rangle (0 \leq i \leq 2)$ と矢印で結ぶ．また $\langle \boldsymbol{p}_i \rangle$ を $\langle \boldsymbol{p} \rangle$ の親，$\langle \boldsymbol{p} \rangle$ を $\langle \boldsymbol{p}_i \rangle$ の子と呼ぶ．$I_n(D)$ が R 公式であるための必要十分条件は，$I_n(D)$ の標本アトム $\langle \boldsymbol{p} \rangle$ から出る二本の矢印の終点が再び $I_n(D)$ の標本アトムであることである．

表 1 1 次則の優良な FSR 公式

No	α	n	m	Er
1	$\{1,1\}$	4	2	2.
2	$\{\frac{1}{3},\frac{1}{3}\}$	4	4	0.66

5 アトムとギルド

5.1 アトムとギルドの理論

R 集合に含まれるアトムの座標は有理数である．以後，座標が有理数のアトムのみを考える．アトムの親子関係はアトムの集合にグラフ構造を導入する．これを親子関係グラフと言う．2 つのアトム a,b について，親子関係グラフで双方向に有向パスが存在するとき，a と b は兄弟であるという．特別に a は a の兄弟であると約束する．a の兄弟の集合を $G(a)$ と書きギルドと呼ぶ．

定理 5 A が R 集合でアトム $a \subset A$ なら，$G(a) \subset A$. //

5.2 ギルド間の関係

定理 6 $G(a) \neq G(b)$ について，a から b へのパスが存在するなら，b から a へのパスは存在しない．

$G(a) \neq G(b)$ で a から b へのパスが存在するとき，$G(a)$ を $G(b)$ の親ギルド，$G(a)$ は $G(b)$ の子ギルドと言い，$G(a) \to G(b)$ と書く．以下の定理の証明は簡単である．

定理 7 A が R 集合，$G(a) \subset A$ かつ $G(a) \to G(b) \Rightarrow G(b) \subset A.//$

親を持たないギルドを根ギルドと言う．根ギルドは，それ自身 R 集合である．

6 FSR 則の構成

伊藤は座標の分母が 8 以下のアトムの集合を構成し，その中のギルド間の親子関係グラフを作成した．そのグラフから得られるすべての 1 次則，3 次則，5 次則のための FSR 標本アトム集合を手で拾い出した．そして，方程式 (2) を解き，FSR 公式を作成し，その中から優良な公式を選抜した．

s 次 FSR 則の誤差指標を

$$Er = \sum_{k=0}^{(s+1)/2} \sum_{l=0}^{\min\{k,(s+1)/2-k\}} \left| \frac{Q_n(x^{2k}y^{2l}) - I_{2k,2l}}{I_{2k,2l}} \right|$$

で定義する．$s+1$ 次までの偶数次単項式 $x^{2k}y^{2l}$ $(k \geq l)$ に対する相対誤差の総和である．Er が小さいほど Q_n は高精度である．

また，標本点数を n，領域を 2 等分したときに発生する関数評価回数 (分割コスト) を m とする．積分領域の長方形を N 回分割して必要な精度に達したとすると，$N+1$ 個の分割領域ができ，総標本点数は $n+Nm$ となる．よって，N が大きいとき (要求精度が高いとき) には，分割領域 1 つあたりの標本点数はほぼ m となる．m が小さいほど公式は効率的である． 1 次則に用いる FSR アトム集合は，アトム 1 個からなる．そのような集合は全部で 3 種ある．そのすべてについて方程式 (2) は解を持ち，FSR 則が構成できる．

3 次則に用いる FSR アトム集合は，アトム 2 個からなる．そのような集合は全部で 9 種である．そのすべてについて方程式 (2) は解を持ち，FSR 則が構成できる．

5 次則に用いる FSR アトム集合は，アトム 4 個からなる．そのような集合は全部で 73 種である．これらのうち，方程式 (2) に解が存在し，実際に 5 次則が構成できるアトム集合は 36 種である．従って 5 次の FSR 積分則は 36 種である．

各次数についてすべての FSR 則を求め，それぞれの分割コスト m と誤差指数 Er を計算した．そして，優良公式を選出して表 (1), 表 (2), 表 (3) に示した．

表の第 1 行は通番 (No) である．第 2 行は標本アトムの集合 α である．第 3 行は標本点数 n，第 4 行は分割コスト (積分領域を 2 等分したときに発生する関数評価回数)m. 第 5 行は誤差指標 Er である．

ここに挙げなかった公式はどれかの優良公式より，コストと精度の両方の基準で劣っている．

表 2 3 次則の優良な FSR 公式

No	α	n	m	Er
1	$\{1,1\},\{0,1\}$	8	5	4.66
2	$\{\frac{1}{3},\frac{1}{3}\},\{1,1\}$	8	6	1.62
4	$\{\frac{1}{3},1\},\{\frac{1}{3},\frac{1}{3}\}$	12	10	0.74

表 3 5 次則の優良な FSR 公式

No	α	n	m	Er
1	$\{0,0\},\{0,1\},\{1,1\},\{\frac{1}{3},\frac{1}{3}\}$	13	10	0.74
5	$\{1,1\},\{0,\frac{1}{3}\},\{\frac{1}{3},1\},\{\frac{1}{3},\frac{1}{3}\}$	20	16	0.49
6	$\{0,1\},\{1,1\},\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\},\{\frac{1}{3},\frac{1}{3}\}$	20	17	0.36
11	$\{0,\frac{1}{5}\},\{0,\frac{3}{5}\},\{\frac{1}{5},1\},\{\frac{3}{5},1\}$	24	20	0.19
29	$\{\frac{2}{3},1\},\{\frac{1}{3},1\},\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\},\{\frac{1}{3},\frac{1}{3}\}$	28	24	0.12

7 おわりに

R 集合をギルドの和集合として捉え，ギルドの親子関係グラフから得られるすべての 1 次則，3 次則，5 次則のための FSR 標本アトム集合を手で拾い出した．そして，方程式 (2) を解き，FSR 公式を作成し，その中から優良な公式を選抜した．これからの課題は構成した公式を，実際に適応型積分則に組み込み，その適合性を調べる．

8 参考文献

[1] 野田恭代, 二次元完全対称積分則の設計, 南山大学数理情報学部数理科学科 2006 年度卒業論文 (2007).

[2] 伊藤加奈恵, 長方形領域における再利用可能型積分公式の設計, 南山大学数理情報学部情報システム数理学科 2011 年度卒業論文 (2012).

[3] H. SUGIURA and T. SAKURAI: J. Comp. Appl. Math., vol.28, no.1-3, pp.367-381(1989).