

# 計算数値研究

## 第1章 FFT と関数近似

三角級数による関数の展開を（古典的）Fourier展開という。Fourier展開はFourierが熱伝導現象の解析に用いたのをその起源とし、美しい理論と多くの応用を持つ。応用上は展開係数の計算が基本的な要求となる。離散型Fourier変換は展開係数を表す積分を台形則で近似したものである。1965年、J.W.CooleyとJ.W.Tukeyは、離散型Fourier変換をきわめて効率的に計算するアルゴリズム、FFT(Fast Fourier Transform；高速Fourier変換)を発表した。FFTは多くの応用分野で既存のアルゴリズムに取って変わるとともに、その高速性を利用して新しい応用を広げている。ここでは、関数近似の立場から離散型Fourier変換とFFTについて述べる。

### 1.1 離散型Fourier展開

周期  $2\pi$  の複素周期関数  $f(t)$  の**積分 (平均)** を

$$If = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \quad , \quad (1)$$

二つの周期関数  $f(t), g(t)$  の**内積**を

$$(f, g) = I(f \bar{g}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

で定義する。ここで  $\bar{\phantom{x}}$  は複素共役を表す。周期  $2\pi$  の複素三角関数

$$e_k(t) = e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt \quad (-\infty < k < \infty)$$

よりなる関数系  $\{e_k(t)\}$  はこの内積に対して

$$(e_j, e_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(j-k)t} dt = \delta_{jk} \equiv \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad (-\infty < j, k < \infty)$$

を満たし、正規直交基底をなす。基底  $\{e_k(t)\}$  による関数  $f(t)$  の展開

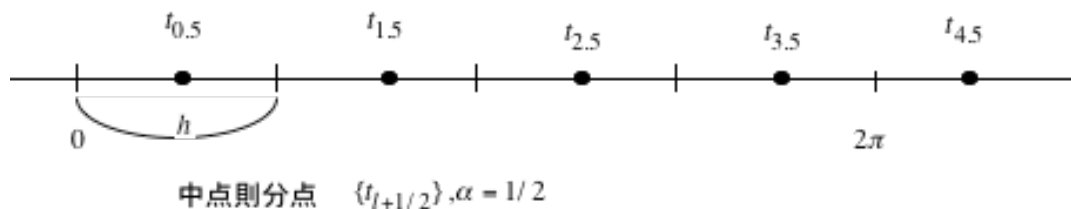
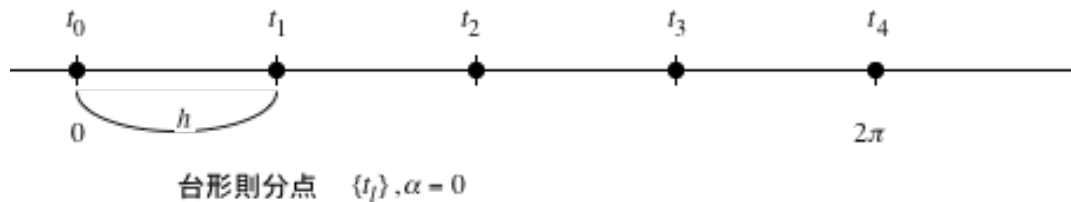
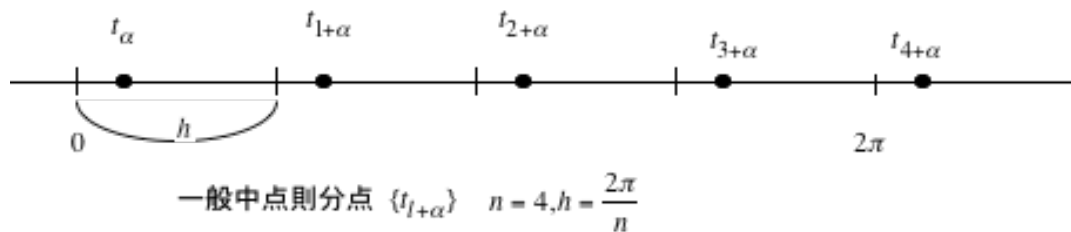
$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad (2)$$

の右辺を  $f(t)$  の **(複素) Fourier展開**、その展開係数

$$c_k = (f, e_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (-\infty < k < \infty) \quad (3)$$

を**Fourier係数**という。

これらを離散化しよう。パラメータ  $0 \leq \alpha < 1$  に対し、間隔  $h = 2\pi/n$  の分点  $t_{l+\alpha} = (l+\alpha)h$  ( $-\infty < l < \infty$ ) を取り、分点上の関数値を  $f_{l+\alpha} = f(t_{l+\alpha})$  とする。  $f$  の周期性より  $f_{n+l+\alpha} = f_{l+\alpha}$  ゆえ、数列は周期  $n$  を持つ。



積分(1)に対する  $n$  点**一般中点則**は

$$M_n^{(\alpha)} f = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} f_{l+\alpha} \cong \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \quad (4)$$

である。これは、最右辺の積分を数値積分則で置き換えたものと解釈される。 $\alpha=1/2$  のときは**中点則**、 $\alpha=0$  のときは、 $f(t)$  の周期性より

$$M_n^{(0)} f = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} f_l = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{2}(f_0 + f_n) + \sum_{l=1}^{n-1} f_l \right\}$$

ゆえ、**台形則**である。同じく  $f(t)$  の周期性より、任意の整数  $m$  について、

$$M_n^{(\alpha)} f = \frac{1}{n} \sum_{l=-m}^{n-m-1} f_{l+\alpha} \quad (5)$$

である。

以下、簡単のため  $\omega_n = \exp(2\pi i/n)$  とする。 $\omega_n^k \neq 1$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ),  $\omega_n^n = 1$  であり、 $\omega_n$  は1の原始  $n$  乗根である。また

$$e_k(t_{l+\alpha}) = \omega_n^{k(l+\alpha)}, \overline{e_k(t_{l+\alpha})} = \omega_n^{-k(l+\alpha)}$$

が成立する。

[定理1] 一般中点則  $M_n^{(\alpha)}$  による基底  $e_k(t) = e^{ikt}$  の積分は

$$M_n^{(\alpha)} e_k = \begin{cases} e^{2\pi i k \alpha / n}, & k \equiv 0 \pmod{n}, \\ I e_k = 0, & k \not\equiv 0 \pmod{n} \end{cases}$$

である。これより、 $k \equiv 0 \pmod{n}$  かつ  $k \neq 0$  のときのみ、 $M_n^{(\alpha)} e_k \neq I e_k$  である。

(証明)  $k \equiv 0 \pmod{n}$  のとき、 $k = mn$  とすると、

$$M_n^{(\alpha)} e_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \omega_n^{mn(l+\alpha)} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \omega_n^{mna} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} e^{2\pi i m \alpha} = e^{2\pi i m \alpha} \quad .$$

これが真の積分値  $I e_0 = 1, I e_{mn} = 0, m \neq 0$  と一致するのは、 $m = 0$  すなわち  $k = 0$  のときのみである。また、

$k \not\equiv 0 \pmod{n}$  のとき、 $\omega_n^k \neq 1, \omega_n^n = 1$  だから

$$M_n^{(\alpha)} e_k = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \omega_n^{k(l+\alpha)} = \frac{\omega_n^{k\alpha} (1 - \omega_n^{kn})}{n(1 - \omega_n^k)} = 0 = I e_k$$

である。//

$n$  点一般中点則  $M_n^{(\alpha)}$  は  $2n-1$  個の基底  $\{e_k(t)\}_{k=-n+1}^{n-1}$  を正確に積分する Gauss 則である。これより、

[系2] (選点直交性)

$$M_n^{(\alpha)} (e_j \bar{e}_k) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \omega_n^{j(l+\alpha)} \overline{\omega_n^{k(l+\alpha)}} = \begin{cases} e^{2\pi i (j-k)\alpha/n}, & j \equiv k \pmod{n}, \\ 0, & j \not\equiv k \pmod{n} \end{cases} \quad (6)$$

が成り立つ。特に、 $M_n^{(\alpha)} (e_k \bar{e}_k) = 1$  である。

(証明)  $e_j(t_l) \overline{e_k(t_l)} = \omega_n^{(j-k)(l+\alpha)}$  であるから、定理1より明か。//

そこで、Fourier 係数  $c_k$  の内積の積分を一般中点則  $M_n^{(\alpha)}$  により置き換えた

$$c_k^{(\alpha)} = M_n^{(\alpha)} (f \bar{e}_k) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} f_{l+\alpha} \omega_n^{-k(l+\alpha)} \quad (-\infty < k < \infty) \quad (7)$$

を  $n$  項離散型 Fourier 係数、 $n$  項離散型 Fourier 係数による三角多項式

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=-m}^{n-m-1} c_k^{(\alpha)} e_k(t) = \sum_{k=-m}^{n-m-1} c_k^{(\alpha)} e^{ikt} \quad (8)$$

を  $f(t)$  の  $n$  項離散型 Fourier 展開あるいは、 $n$  項一般中点則 Fourier 展開という。ここで  $m$  は整数定数である。

[定理3] 周期関数  $f(t)$  の離散型 Fourier 展開(8)は分点  $t_{l+\alpha}$  ( $-\infty \leq l < \infty$ ) 上で  $f(t)$  を補間する。すなわち、

$$\varphi_n(t_{l+\alpha}) = \sum_{k=-m}^{n-m-1} c_k^{(\alpha)} \omega_n^{k(l+\alpha)} = f_{l+\alpha} = f(t_{l+\alpha}) \quad (-\infty < l < \infty) \quad . \quad (9)$$

(証明)  $f(t), \varphi_n(t)$  の周期性より、 $0 \leq l < n$  で証明すればよい。式(5)と定理1より、 $0 \leq j, l < n$  なら

$$\frac{1}{n} \sum_{k=m}^{n+m-1} \omega_n^{k(l-j)} = M_n^{(0)} e_{l-j} = \delta_{jl}$$

ゆえ、式(8)の両辺に  $t_{l+\alpha}$  を代入すると、式(7)より

$$\begin{aligned} \sum_{k=-m}^{n-m-1} c_k^{(\alpha)} \omega_n^{k(l+\alpha)} &= \sum_{k=-m}^{n-m-1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_{j+\alpha} \omega_n^{-k(j+\alpha)} \omega_n^{k(l+\alpha)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} f_{j+\alpha} \frac{1}{n} \sum_{k=-m}^{n-m-1} \omega_n^{k(l-j)} = \sum_{j=0}^{n-1} f_{j+\alpha} \delta_{jl} = f_{l+\alpha} \end{aligned}$$

となる。//

[定理4] 離散型Fourier係数は次のような周期的性質を持つ。

$$c_{k+jn}^{(\alpha)} = e^{-2\pi i j \alpha} c_k^{(\alpha)} \quad (-\infty < k, j < \infty) \quad (10)$$

(証明)  $\omega_n^{-(k+jn)(l+\alpha)} = \omega_n^{-k(l+\alpha)} \omega_n^{-jn\alpha} = \omega_n^{-k(l+\alpha)} e^{-2\pi i j \alpha}$  より明か。//

したがって一周分  $n$  個の係数  $c_k^{(\alpha)}$  ( $0 \leq k < n$ ) が基本的である。

基本周期  $[0, 2\pi)$  における  $f(t)$  の標本値

$$\mathbf{f} = (f_\alpha, f_{1+\alpha}, \dots, f_{n-1+\alpha})^T$$

から離散型Fourier係数の一周分

$$\mathbf{c} = (c_0^{(\alpha)}, c_1^{(\alpha)}, \dots, c_{n-1}^{(\alpha)})^T, c_k^{(\alpha)} = M_n^{(\alpha)}(f \bar{e}_k) \quad (0 \leq k < n)$$

への線形変換を行列表示して

$$\mathbf{c} = \frac{1}{n} W_n^{(\alpha)} \mathbf{f} \quad (11)$$

と書く。特に  $W_n = W_n^{(0)}$  と書くことにする。定義(7)より、

$$W_n^{(\alpha)} = (\omega_n^{-k(l+\alpha)})_{0 \leq k, l < n} = (\omega_n^{-k\alpha} \omega_n^{-kl})_{0 \leq k, l < n} = D_n^{(\alpha)} W_n \quad (12)$$

である。ここで、 $k, l$  はそれぞれ行と列の添字である。また、

$$D_n^{(\alpha)} = \text{diag}(1, \omega_n^{-\alpha}, \dots, \omega_n^{-(n-1)\alpha}) \quad (13)$$

である。定理3の式(9)で  $m=0$  として

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k^{(\alpha)} \omega_n^{k(l+\alpha)} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{(\alpha)} \overline{\omega_n^{-k(l+\alpha)}} = f_{l+\alpha} \quad (0 \leq l < n).$$

最後の等式を行列表示して、

$$(W_n^{(\alpha)})^H \mathbf{c} = \mathbf{f} \quad (14)$$

を得る。ここで  $^H$  は行列のHermite転置である。これと式(11)より、

$$\frac{1}{n} W_n^{(\alpha)} (W_n^{(\alpha)})^H = I_n$$

である。ゆえに  $(1/\sqrt{n})W_n^{(\alpha)}$  はユニタリで

$$\text{cond}_2\left(\frac{1}{n}W_n^{(\alpha)}\right) = \text{cond}_2((W_n^{(\alpha)})^H) = 1 \quad (15)$$

で、線形変換(11), (14)は最良の数値的安定性を持つ。

## 1.2 離散型Fourier展開の誤差

三角多項式による近似が有効な関数は、そのFourier係数  $c_k$  が  $|k| \rightarrow \infty$  で速く0に収束する関数である。最低限の条件として関数  $f(t)$  のFourier展開(2)の絶対収束  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty$  を仮定する。

[定理5] 関数  $f(t)$  のFourier展開(2)が絶対収束するなら、離散型Fourier係数(7)は次のように表現される。

$$c_k^{(\alpha)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m \alpha} c_{k+mn} \quad (-\infty < k < \infty) \quad . \quad (16)$$

これより、離散型Fourier係数の誤差は

$$c_k^{(\alpha)} - c_k = \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{\infty} e^{2\pi i m \alpha} c_{k+mn} \quad (-\infty < k < \infty) \quad . \quad (17)$$

特に、Fourier展開(2)が負巾の項を含まず、

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad (18)$$

のときは

$$c_k^{(\alpha)} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{2\pi i m \alpha} c_{k+mn} \quad (0 \leq k < \infty) \quad , \quad (19)$$

$$c_k^{(\alpha)} - c_k = \sum_{m=1}^{\infty} e^{2\pi i m \alpha} c_{k+mn} \quad (0 \leq k < \infty) \quad (20)$$

である。

(証明) Fourier展開の絶対収束性より

$$c_k^{(\alpha)} = M_n^{(\alpha)}(f\bar{e}_k) = M_n^{(\alpha)}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e_j \bar{e}_k\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j M_n^{(\alpha)}(e_j \bar{e}_k) \quad .$$

系2より  $j = k + mn$  ( $-\infty < m < \infty$ ) の項のみが残り、式(16), (17)を得る。Fourier展開(2)が負巾の項を含まないときも同様である。//

[定理6] Fourier展開(2)が絶対収束するなら、任意の点  $t$  における離散型Fourier展開(8)の誤差は

$$|\varphi_n(t) - f(t)| \leq 2 \left\{ \sum_{k=-\infty}^{-m-1} |c_k| + \sum_{k=n-m}^{\infty} |c_k| \right\} = 2 \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| - \sum_{k=-m}^{n-m-1} |c_k| \right\} \quad (21)$$

で評価される。特に、Fourier展開(2)が負巾の項を含まないときは、

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{(\alpha)} e^{ikt} \quad (22)$$

とすれば、

$$|\varphi_n(t) - f(t)| = 2 \sum_{k=n}^{\infty} |c_k| \quad (23)$$

である。

(証明)  $|e^{ikt}| = 1$  であるから、三角不等式より

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t) - f(t)| &= \left| \sum_{k=-m}^{n-m-1} (c_k^{(\alpha)} - c_k) e^{ikt} - \sum_{k=-\infty}^{-m-1} c_k e^{ikt} - \sum_{k=n-m}^{\infty} c_k e^{ikt} \right| \\ &\leq \sum_{k=-m}^{n-m-1} |c_k^{(\alpha)} - c_k| + \sum_{k=-\infty}^{-m-1} |c_k| + \sum_{k=n-m}^{\infty} |c_k| \end{aligned}$$

となる。最右辺の第一項は定理5より

$$\begin{aligned} \sum_{k=-m}^{n-m-1} |c_k^{(\alpha)} - c_k| &= \sum_{k=-m}^{n-m-1} \left| \sum_{j \neq 0} c_{k+jn} e^{2\pi i j \alpha} \right| \leq \sum_{k=-m}^{n-m-1} \sum_{j \neq 0} |c_{k+jn}| = \sum_{k=-m}^{n-m-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_{k+jn}| - \sum_{k=-m}^{n-m-1} |c_k| \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| - \sum_{k=-m}^{n-m-1} |c_k| = \sum_{k=-\infty}^{-m-1} |c_k| + \sum_{k=n-m}^{\infty} |c_k| \end{aligned}$$

となり、合わせて式(21)を得る。Fourier展開(2)が負巾の項を含まないときも同様に証明できる。 //

式(21)の最右辺で  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$  は  $m$  によらない定数である。ゆえに、離散型Fourier展開  $\varphi_n(t)$  の初項の次数  $-m$  をFourier係数  $c_{-m}, c_{-m+1}, \dots, c_{n-m-1}$  が主要な (絶対値の大きい) 係数を含むように選べば効果的である。特に、Fourier展開(2)が負巾の項を含まないときは式(22)のように  $m=0$  とする。主要係数の分布に関する情報がなければ、次数を正負に等分に振り分けて  $m = [n/2]$  と取る。

この定理より直ちに次の系を得る。

[系7] Fourier展開(2)が絶対収束するなら、 $m, n-m \rightarrow \infty$  のとき離散型Fourier展開  $\varphi_n(t)$  は関数  $f(t)$  に一様収束する。特に、Fourier展開(2)が負巾の項を含まないときは  $m=0$  として、 $n \rightarrow \infty$  で  $\varphi_n(t)$  は  $f(t)$  に一様収束する。

関数  $f$  が滑らかであるほど、 $|k| \rightarrow \infty$  としたときFourier係数  $c_k$  は速く0に収束するので  $\varphi_n(t)$  の関数  $f(t)$  への収束は急速である。特に被近似関数  $f(t)$  が解析的であるなら次の定理が成り立つ。

[定理8] 被近似関数  $f(t)$  が複素平面の幅  $2d > 0$  の閉帯領域

$$B_d = \{z = x + iy : -\infty < x < \infty, -d \leq y \leq d\}$$

で解析的なら、ある正定数により

$$|c_k| \leq Cr^{|k|} \quad (-\infty < k < \infty), r = e^{-d} \quad (24)$$

である.

(証明) 点  $z = x + iy \in B_d$  なら,  $f$  の解析性と周期性より,

$$f(z + 2\pi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x + 2\pi)}{k!} (iy)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (iy)^k = f(z) \quad (25)$$

である.

以後  $k \geq 0$  とする. 右図の積分路  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$  上の  $F(z) = f(z)e^{-ikz}$  の周回積分は,  $\Gamma$  上とその内部で  $F$  が解析的ゆえ 0 である. また, 式(25)より,

$$\int_{\Gamma_2} F(z) dz = - \int_{\Gamma_4} F(z) dz$$

であるから,

$$\int_{\Gamma_1} F(z) dz + \int_{\Gamma_3} F(z) dz = \int_{\Gamma} F(z) dz = 0.$$

すなわち

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} F(z) dz = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_3} F(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t - id) e^{-ik(t-id)} dt = \frac{e^{-kd}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t - id) e^{-ikt} dt. \end{aligned}$$

ゆえに,

$$|c_k| \leq \frac{r^k}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t - id)| dt$$

となる.

同じく, 積分路を  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2' + \Gamma_3' + \Gamma_4'$  に取り替えて, 同様の議論から,

$$|c_{-k}| = \left| \frac{e^{-kd}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t + id) e^{ikt} dt \right| \leq \frac{r^k}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t + id)| dt.$$

以上より,

$$C = \frac{1}{2\pi} \max \left\{ \int_0^{2\pi} |f(t - id)| dt, \int_0^{2\pi} |f(t + id)| dt \right\}$$

とすれば, 式(24)が成立する. //

[系9] 定理8と同じ条件で

$$|\varphi_n(t) - f(t)| = O(r^m + r^{n-m}), r = e^{-d} < 1 \quad (26)$$

特に,  $m = [n/2]$  なら

$$|\varphi_n(t) - f(t)| = O(r^{n/2}) \quad (27)$$

である.  $f$  のFourier展開(2)が負中の項を含まないときは  $m = 0$  として,

$$|\varphi_n(t) - f(t)| = O(r^n) \quad (28)$$

である。

(証明) 定理8より, 関数  $f(t)$  が解析的なら, ある正定数  $C > 0, 0 \leq r < 1$  により  $|c_k| \leq Cr^{|k|}$  ( $-\infty < k < \infty$ ) である。これと式(21)より,

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t) - f(t)| &\leq 2 \left\{ \sum_{k=-\infty}^{-m-1} |c_k| + \sum_{k=n-m}^{\infty} |c_k| \right\} \leq 2 \left\{ \sum_{k=m+1}^{\infty} Cr^k + \sum_{k=n-m}^{\infty} Cr^k \right\} \\ &= 2C \left\{ \frac{r^{m+1}}{1-r} + \frac{r^{n-m}}{1-r} \right\} = O(r^m + r^{n-m}) \end{aligned}$$

となり式(26)が成立する。式(27)はこれより明か。また式(28)も式(26)と同様に証明できる。 //

関数  $f(t)$  が解析的で定理8の閉帯領域  $B_d$  の幅  $2d$  が大なら, 離散型Fourier展開の精度はきわめて良好である。

### 1.3 実離散型Fourier展開

関数  $f(t)$  が実関数ならそのFourier係数は

$$c_{-k} = \overline{c_k} \quad (0 \leq k < \infty) \quad (29)$$

となる。これを離散Fourier係数のHermite対称性という。このことから,

$$a_k = 2 \operatorname{Re}\{c_k\}, b_k = -2 \operatorname{Im}\{c_k\} \quad (0 \leq k < \infty) \quad (30)$$

とし,

$$c_k = (a_k - ib_k)/2 \quad (0 \leq k < \infty) \quad (31)$$

を式(2)に代入して,  $e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$  をもちいると  $f(t)$  の実Fourie展開

$$f(t) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (32)$$

を得る。式(30)より, cosine係数  $a_k$  と sine係数  $b_k$  は

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (0 \leq k < \infty) \quad , \quad (33)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (0 \leq k < \infty) \quad (34)$$

と積分表示される。

項数  $2n$  の一般中点則Fourier展開

$$\varphi_{2n}(t) = \sum_{k=-n+1}^n c_k^{(\alpha)} e^{ikt} \quad , \quad (35)$$

は点列  $t_{l+\alpha} = \pi(l+\alpha)/n$  ( $-\infty < l < \infty$ ) 上の  $f(t)$  の補間であるが, 一般には実関数とならない。そこで



$$f_{2n}(t) = \text{Re}\{\varphi_{2n}(t)\} \quad (36)$$

とすると、これはもちろん実関数で、 $f(t)$  の実数性より補間条件

$$f_{2n}(t_{l+\alpha}) = \text{Re}\{p_{2n}(t_{l+\alpha})\} = \text{Re}\{f(t_{l+\alpha})\} = f(t_{l+\alpha}) \quad (-\infty < l < \infty) \quad (37)$$

を満たす。さて、**離散型cosine係数**  $a_k^{(\alpha)}$  と **離散型sine係数**  $b_k^{(\alpha)}$  を式(30)になら

$$\begin{aligned} a_k^{(\alpha)} &= 2 \text{Re}\{c_k^{(\alpha)}\} \quad (k \geq 0), \\ b_k^{(\alpha)} &= -2 \text{Im}\{c_k^{(\alpha)}\} \quad (k \geq 1) \end{aligned} \quad (38)$$

で定義する。ただし、 $f(t)$  の実数性より  $c_0^{(\alpha)}$  は実数で、 $b_0^{(\alpha)} = 0$  である。これは、式(33), (34)の積分を一般中点則で近似したものに他ならず、

$$\begin{aligned} a_k^{(\alpha)} &= 2M_{2n}^{(\alpha)}(f \cos kt), \\ b_k^{(\alpha)} &= 2M_{2n}^{(\alpha)}(f \sin kt) \end{aligned}$$

である。さて、 $f(t)$  の実数性より式(29)と対応して

$$\begin{aligned} c_{-k}^{(\alpha)} &= \frac{1}{2n} \sum_{l=0}^{2n-1} f\left(\frac{\pi(l+\alpha)}{n}\right) \omega_{2n}^{k(l+\alpha)} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{l=0}^{2n-1} f\left(\frac{\pi(l+\alpha)}{n}\right) \omega_{2n}^{-k(l+\alpha)} = \overline{c_k^{(\alpha)}} \quad (0 \leq k \leq n) \end{aligned} \quad (39)$$

を得る。これを離散Fourier係数の**Hermite対称性**という。これと定理4より

$$c_{2n-k}^{(\alpha)} = e^{-2\pi i \alpha} \overline{c_k^{(\alpha)}} \quad (-\infty < k < \infty) \quad (40)$$

である。

式(36), (38), (39)より

$$\begin{aligned} f_{2n}(t) &= \text{Re}\{c_0^{(\alpha)} + \sum_{k=1}^{n-1} (c_k^{(\alpha)} e^{ikt} + \overline{c_k^{(\alpha)}} e^{-ikt}) + c_n^{(\alpha)} e^{int}\} \\ &= \text{Re}\{c_0^{(\alpha)}\} + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \text{Re}\{c_k^{(\alpha)} e^{ikt}\} + \text{Re}\{c_n^{(\alpha)} e^{int}\} \\ &= \frac{1}{2} a_0^{(\alpha)} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k^{(\alpha)} \cos kt + b_k^{(\alpha)} \sin kt) + \frac{1}{2} (a_n^{(\alpha)} \cos nt + b_n^{(\alpha)} \sin nt) \end{aligned} \quad (41)$$

を得る。これを  $n$  次**実離散型Fourier展開**という。

パラメタ  $\alpha=0$  のときは、式(7)で  $k=n$  として  $c_n^{(0)} \in \mathbb{R}$  ゆえ  $b_n^{(0)} = 0$  となり、式(41)は

$$f_{2n}(t) = \frac{1}{2} a_0^{(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k^{(0)} \cos kt + b_k^{(0)} \sin kt) + \frac{1}{2} a_n^{(0)} \cos nt \quad . \quad (42)$$

同じくパラメタ  $\alpha=1/2$  のときは  $a_n^{(1/2)} = 0$  となり、式(41)は

$$f_{2n}(t) = \frac{1}{2} a_0^{(1/2)} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k^{(1/2)} \cos kt + b_k^{(1/2)} \sin kt) + \frac{1}{2} b_n^{(1/2)} \sin nt \quad (43)$$

である。

関数  $f(t)$  が解析的であるとき実離散型Fourier展開も良い収束性を持つ。

[定理10] 定理8と同じ条件で

$$|f_{2n}(t) - f(t)| = O(r^n) \quad , r = e^{-d} < 1 \quad .$$

(証明) 定義(36)と系9より明か. //

#### 1.4 離散型cosine展開

関数  $f(t)$  が実偶関数ならそのFourier係数は実数, すなわち

$$b_k = 0 \quad (1 \leq k < \infty) \quad . \quad (44)$$

である。したがって,  $f(t)$  の実Fourier展開は

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt \quad , \quad (45)$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (0 \leq k < \infty) \quad (46)$$

である。これを実偶関数のcosine展開という。

実偶関数の  $n$  次実離散型Fourier展開(41)は  $\alpha = 0$  の台形則,  $\alpha = 1/2$  の中点則で特に簡明である。

$f(2\pi - t) = f(t)$  から, 台形則と中点則で

$$c_{-k}^{(0)} = \frac{1}{2n} \sum_{l=0}^{2n-1} f\left(\frac{\pi l}{n}\right) \omega_{2n}^{kl} = \frac{1}{2n} \sum_{l=0}^{2n-1} f\left(\frac{\pi(2n-l)}{n}\right) \omega_{2n}^{kl} = \frac{1}{2n} \sum_{l=1}^{2n} f\left(\frac{\pi l}{n}\right) \omega_{2n}^{-kl} = c_k^{(0)} \quad .$$

これと式(39)より, 式(44)と対応して

$$b_k^{(0)} = 0 \quad (1 \leq k < \infty) \quad . \quad (47)$$

同様に, 中点則においても

$$b_k^{(1/2)} = 0 \quad (1 \leq k < \infty) \quad (48)$$

が成立する。したがって実離散型Fourier展開(42), (43)は

$$f_{2n}(t) = \frac{1}{2}a_0^{(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{(0)} \cos kt + \frac{1}{2}a_n^{(0)} \cos nt \quad , \quad (49)$$

$$a_k^{(0)} = \frac{2}{n} \left\{ \frac{1}{2}(f(0) + f(\pi) \cos \pi k) + \sum_{l=1}^{n-1} f\left(\frac{\pi l}{n}\right) \cos \frac{\pi kl}{n} \right\} \quad (0 \leq k \leq n) \quad (50)$$

$$f_{2n}(t) = \frac{1}{2}a_0^{(1/2)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{(1/2)} \cos kt \quad , \quad (51)$$

$$a_k^{(1/2)} = \frac{2}{n} \sum_{l=0}^{n-1} f\left(\frac{\pi(l+\frac{1}{2})}{n}\right) \cos \frac{\pi k(l+\frac{1}{2})}{n} \quad (0 \leq k \leq n-1) \quad (52)$$

となる。式(49)を  $n$  次**台形則cosine展開**という。式(50)右辺は式(46)の積分に対する  $n+1$  点台形則近似である。式(51)を  $n-1$  次**中点則cosine展開**という。式(52)右辺は式(46)の積分の  $n$  点中点則近似である。

### 1.5 離散型sine展開

関数が実奇関数ならそのFourier係数は純虚数，すなわち

$$a_k = 0 \quad (0 \leq k < \infty) \quad (53)$$

である。したがって，の実Fourie展開は

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt \quad , \quad (54)$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (0 \leq k < \infty) \quad (55)$$

である。これを実奇関数のsine展開という。

実奇関数の  $n$  次実離散型Fourier展開も  $\alpha=0$  の台形則，  $\alpha=1/2$  の中点則で特に簡明である。奇関数性  $f(2\pi-t)=-f(t)$  を用い，前節の式(47), (48)と同様に，

$$a_k^{(0)}, a_k^{(1/2)} = 0 \quad (0 \leq k \leq n) \quad (56)$$

を示すことができる。したがって実離散型Fourier展開(42), (43)は

$$f_{2n}(t) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k^{(0)} \sin kt \quad , \quad (57)$$

$$b_k^{(0)} = \frac{2}{n} \sum_{l=1}^{n-1} f\left(\frac{\pi l}{n}\right) \sin \frac{\pi k l}{n} \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad , \quad (58)$$

$$f_{2n}(t) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k^{(1/2)} \sin kt + \frac{1}{2} b_n^{(1/2)} \sin nt \quad , \quad (59)$$

$$b_k^{(1/2)} = \frac{2}{n} \sum_{l=0}^{n-1} f\left(\frac{\pi(l+\frac{1}{2})}{n}\right) \sin \frac{\pi k(l+\frac{1}{2})}{n} \quad (1 \leq k \leq n) \quad (60)$$

となる。式(57)を  $n-1$  次**台形則sine展開**，式(59)を  $n$  次**中点則sine展開**という。

### 1.6 離散型Chebyshev展開

区間  $[-1,1]$  で定義された実連続関数を  $f(x)$  とする。  $F(t)=f(\cos t)$  は周期  $2\pi$  の実周期偶関数であるから，台形則cosine展開

$$F_{2n}(t) = \frac{1}{2} a_0^{(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{(0)} \cos kt + \frac{1}{2} a_n^{(0)} \cos nt$$

は分点  $t_l = \pi l / n$  ( $0 \leq l \leq n$ ) 上の  $F$  の補間である. 両辺に  $t = \cos^{-1} x$  を代入すると Chebyshev 級数

$$p_n^{(0)}(x) = F_{2n}(\cos^{-1} x) = \frac{1}{2} a_0^{(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{(0)} T_k(x) + \frac{1}{2} a_n^{(0)} T_n(x) \quad , \quad (61)$$

$$a_k^{(0)} = \frac{2}{n} \left\{ \frac{1}{2} (f(-1) + (-1)^k f(1)) + \sum_{l=1}^{n-1} f\left(\cos \frac{\pi l}{n}\right) \cos \frac{\pi k l}{n} \right\} \quad (0 \leq k \leq n) \quad (62)$$

を得る.  $F_{2n}(t)$  の  $F$  に対する補間条件より,  $\eta_l = \cos(t_l)$  ( $0 \leq l \leq n$ ) に対し

$$p_n^{(0)}(\eta_l) = F_{2n}(t_l) = F(t_l) = f(\cos(t_l)) = f(\eta_l)$$

となる.  $p_n^{(0)}(x)$  を  $f(x)$  の  $n$  次 **台形則 Chebyshev 展開** という.

同様に, 中点則 cosine 展開

$$f_{2n}(t) = \frac{1}{2} a_0^{(1/2)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{(1/2)} \cos kt$$

より得られる Chebyshev 級数

$$p_n^{(1/2)}(x) = F_{2n}(\cos^{-1} x) = \frac{1}{2} a_0^{(1/2)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{(1/2)} T_k(x) \quad , \quad (63)$$

$$a_k^{(1/2)} = \frac{2}{n} \sum_{l=1}^{n-1} f\left(\cos \frac{\pi(l+\frac{1}{2})}{n}\right) \cos \frac{\pi k(l+\frac{1}{2})}{n} \quad (0 \leq k \leq n-1) \quad (64)$$

は Chebyshev 点  $\xi_l = \cos(t_{l+1/2})$  ( $0 \leq l \leq n-1$ ) 上の  $f$  の  $n-1$  次補間多項式である. これを,  $n-1$  次 **中点則 Chebyshev 展開** という.

関数  $f(x)$  が実区間  $[-1,1]$  を含む複素領域で解析的なら Chebyshev 補間多項式の収束は良好である.

[定理11] 関数  $f(x)$  が複素平面上の楕円

$$E_r = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| + |z+1| = r + r^{-1}\} \quad , \quad r < 1$$

の内部及び周上で解析的なら,

$$|p_n(x) - f(x)| = O(r^n) \quad (x \in [-1,1]) \quad . \quad (65)$$

(証明) 複素  $\tau$ -平面の実軸を中心線とする幅  $d = -\log r$  の閉帯領域を

$$B_d = \{\tau = t + iu : -\infty < t < \infty, -d \leq u \leq d\} \quad ,$$

複素  $w$ -平面の原点を中心とする半径  $r, r^{-1}$  の2円を境界とする閉円環領域を

$$A_r = \{w \in \mathbb{C} : r \leq |w| \leq r^{-1}\}$$

とする. 変換  $w = \varphi(\tau) = e^{i\tau}$  は閉領域  $B_d$  を閉領域  $A_r$  に写す. また変換  $z = \psi(w) = (w + w^{-1})/2$  は閉領域  $A_r$  を

閉領域  $E_r$  に写す (演習問題). 結局, 変換

$$z = \psi \circ \varphi(\tau) = \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{2} = \cos \tau$$

は閉領域  $B_d$  を閉領域  $E_r$  に写す. ゆえに  $F(\tau) = f(\cos \tau)$  は閉領域  $B_d$  で解析的である. ゆえに定理10より実周期関数  $F(t)$  の  $n$  次実離散型Fourier展開  $F_{2n}(t)$  は

$$|F_{2n}(t) - F(t)| = O(r^n), r = e^{-d} < 1$$

を満たす. この式で  $t = \cos^{-1} x$  とすれば式(65)である. //

変数  $x$  の  $n$  次以下の実係数多項式全体の集合を  $\Pi_n$  とする. 区間  $[-1,1]$  上の実関数  $f(x)$  の**最良近似度**は

$$E_n(f) = \min_{g \in \Pi_n} \left\{ \max_{x \in [-1,1]} |g(x) - f(x)| \right\}$$

で定義される. 上の定理より解析関数の最良近似度が評価できる.

[系12] 区間  $[-1,1]$  で  $f(x)$  が解析的なら, ある  $0 \leq r < 1$  が存在して  $f(x)$  の最良近似度は

$$E_n(f) = O(r^n). \quad (66)$$

(証明) 条件より, ある  $0 \leq r < 1$  が存在して  $f(x)$  は閉楕円  $E_r$  で解析的である. ゆえに, 定理11より

$$E_n(f) \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |p_n(x) - f(x)| = O(r^n)$$

である. //

## 1.7 Clenshaw-Curtis積分則

区間  $[-1,1]$  の関数  $f(x)$  の  $n$  次台形則Chebyshev展開(61)を項別積分して近似積分則

$$C_n f = \frac{1}{2} \rho_0 a_0^{(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k a_k^{(0)} + \frac{1}{2} \rho_n a_n^{(0)} \equiv If = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (67)$$

を得る. ここで,

$$\rho_k = \int_{-1}^1 T_k(x) dx = \begin{cases} 2/(1-k^2) & , k \equiv 0 \pmod{2}, \\ 0 & , k \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \quad (68)$$

である. これをClenshaw-Curtis (クレンショウ・カーチス) 積分則という.

離散型Chebyshev展開  $p_n(x)$  は分点  $\xi_l = \cos(t_l)$  ( $0 \leq l \leq n$ ) 上の  $f(x)$  の  $n$  次補間多項式だから, Clenshaw-Curtis積分則は補間型  $n+1$  点則で次数は  $n$  以上である. Clenshaw-Curtis積分則は, そのノルム  $W$  が  $n$  によらず  $W=2$  で, 安定であることが知られている.

定理11より直ちに次の定理を得る.

[定理13] 関数が区間  $[-1,1]$  で解析的なら, ある  $0 \leq r < 1$  が存在して

$$C_n f - \int_{-1}^1 f(x) dx = O(r^n) \quad (69)$$

## 練習問題

1. 関数  $f(t) = 1/(1 - \alpha e^{it})$ ,  $|\alpha| < 1$  について次の問に答えよ.

1)  $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k e^{ikt}$  を示せ.

2)  $p_n(t) = (1 - \alpha^{n+1} e^{i(n+1)t}) / \{(1 - \alpha^n)(1 - \alpha e^{it})\}$  が  $f(t)$  の  $n$  項台形則 Fourier 展開であることを示せ. (ヒント: 補間条件を確認せよ)

3) 誤差を評価し, 定理6の結果と比較せよ.

4) 複素平面における  $f(t)$  の特異点 (極) を求め, 系9を適用せよ.

この関数は, FFTのプログラムのテストによく用いられる.

2. 漸化式(42)を示せ.

3. 定理11の証明中で, 変換  $\psi(w) = (w + w^{-1})/2$  が閉領域を閉領域  $E_r$  に写すことを示せ.

4. 系12の証明と9章定理3より, 関数が定理11の条件を満たすとき Gauss-Legendre 積分則の誤差が

$$|\hat{I}_n f - If| = O(r^{2n})$$

となることを示せ.

5. 積分  $I = \int_0^1 e^x dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx$ ,  $f(x) = \exp((x+1)/2)$  の最右辺に Clenshaw-Curtis 積分則を適用し, 数値計算せよ. 離散型 Chebyshev 係数は式(82)で計算せよ.

1) 誤差  $E_n = C_n f - I$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) を求めよ.