授業コード：53B03-001	参照物：ノート1冊，教科書1冊，電卓1台	回収：解答用紙のみ

数値解析中間試験 ’18.07.05

1．$|x| << 1$のとき，以下の値を求める桁落ちの影響の小さい計算法を示せ．（各10点）

1) $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}$，　2) $e^{3x}-e^{x}$，　3) $1-\sqrt{\cos x}$．

2．半径 r の円の面積は $S = pr^2, p = \pi$ である． r の測定値 r' と円周率 $p = \pi = 3.141592\cdots$ の近似値 $p' = 3.14$ による面積の計算値は $S' = p'r'^2$ である． $\Delta r = r' - r$ を測定誤差，円周率の誤差を $\Delta p = p' - p$ とするとき，面積の誤差 $\Delta S = S' - S$ を考える．

1) 面積の絶対誤差 $|\Delta S|$ を，測定値の絶対誤差 $|\Delta r|, |\Delta p|$ により評価せよ．（5点）

2) 面積の相対誤差 $\left|\frac{\Delta S}{S}\right|$ を，測定値の相対誤差 $\left|\frac{\Delta r}{r}\right|, \left|\frac{\Delta p}{p}\right|$ により評価せよ．（5点）

3) $\left|\frac{\Delta r}{r}\right| \le 10^{-4}$ のとき，相対誤差 $\left|\frac{\Delta S}{S}\right|$ を評価せよ．（5点）

4) 上の計算に近似値 $p' = 3.14$ の精度は十分だと言えるか？ (5点)

3． $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ の区間 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ における $2n-1$ 次チェビシェフ補間を $p_{2n-1}(x)$

1) $f^{(2n)}(x) = \cosh x$ となることを示せ．（5点）

2) 絶対誤差評価 $|p_{2n-1}(x) - f(x)| \le \frac{2}{4^{2n}(2n)!}\cosh\frac{1}{2}$ の導出を書け．（5点）

3) $n = 3$ のとき， $|p_5(x) - f(x)| < 10^{-6}$ となることを示せ．（10点）

（ヒント： $\cosh\frac{1}{2} = \frac{e^{1/2}+e^{-1/2}}{2} < \frac{2+2^{-1}}{2} = \frac{5}{4}$ ）

4．線形変換 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$，$A = \begin{pmatrix} 100 & -99 & 100 \\ -101 & 100 & -101 \\ 100 & -100 & 99 \end{pmatrix}$ を考える． $A^{-1} = \begin{pmatrix} 200 & 199 & 1 \\ 101 & 100 & 0 \\ -100 & -100 & -1 \end{pmatrix}$ である．

1) ノルム $\|A\|_\infty, \|A^{-1}\|_\infty$ を求めよ．（10点）

2) 条件数 $\mathrm{cond}_\infty(A)$ を求めよ．（10点）

3) 入力相対誤差 $\frac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} \le 10^{-8}$ のとき，出力相対誤差 $\frac{\|\Delta \boldsymbol{y}\|_\infty}{\|\boldsymbol{y}\|_\infty} \le 10^{-3}$ は常に成立するか？（10点）

解答

1．1) (10点) $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=\dfrac{(1+\sin x)-(1-\sin x)}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=\dfrac{2\sin x}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}$．

2) (10点) $e^{3x}-e^{x}=e^{2x}(e^{x}-e^{-x})=2e^{2x}\sinh x$．

3) (10点) $1-\sqrt{\cos x}=\dfrac{1-\cos x}{1+\sqrt{\cos x}}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{1+\sqrt{\cos x}}$．

2．1) (5点) $\dfrac{\partial S}{\partial p}=r^2,\ \dfrac{\partial S}{\partial r}=2pr$ と $\Delta S\cong E=\dfrac{\partial S}{\partial p}\Delta p+\dfrac{\partial S}{\partial r}\Delta r$ より．

$$|\Delta S|\cong|E|=\left|\frac{\partial S}{\partial p}\Delta p+\frac{\partial S}{\partial r}\Delta r\right|\le\left|\frac{\partial S}{\partial p}\right||\Delta p|+\left|\frac{\partial S}{\partial r}\right||\Delta r|=r^2|\Delta p|+2pr|\Delta r|\,.$$

2) (5点) 1)より，$\left|\dfrac{\Delta S}{S}\right|\cong\left|\dfrac{E}{S}\right|\le\dfrac{r^2|\Delta p|+2pr|\Delta r|}{|pr^2|}=\left|\dfrac{\Delta p}{p}\right|+2\left|\dfrac{\Delta r}{r}\right|$．

3) (5点) 小問2)の評価式に，$\left|\dfrac{\Delta p}{p}\right|=\dfrac{|3.14-3.14159\cdots|}{3.14159\cdots}=5.06\cdots\times10^{-4}$，$+\left|\dfrac{\Delta r}{r}\right|\le10^{-4}$ を代入して，

$$\left|\frac{\Delta S}{S}\right|\cong\left|\frac{E}{S}\right|\le\left|\frac{\Delta p}{p}\right|+2\left|\frac{\Delta r}{r}\right|<5.1\times10^{-4}+2\times10^{-4}=7.1\times10^{-4}\,.$$ (数値 5.1 は切り上げ)

4) (5点) 十分ではない．数値計算における数学定数は，計算精度(通常は倍精度)で与えるべきである．

解説：そのとき，$\left|\dfrac{\Delta p}{p}\right|\le \mathrm{u}<1.1\times10^{-16}$ なので，$\left|\dfrac{\Delta S}{S}\right|<1.1\times10^{-16}+2.0\times10^{-4}=2.000\cdots\times10^{-4}$ となる．出力誤差には測定誤差しか反映しない．これが理想である．

3．1) (5点) $\dfrac{d^k}{dx^k}\left(e^{-x}\right)=(-1)^k e^{-x}$ より，$f^{(2n)}(x)=\dfrac{e^{x}+(-1)^{2n}e^{-x}}{2}=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$．

または，公式 $\dfrac{d}{dx}\cosh x=\sinh x,\ \dfrac{d}{dx}\sinh x=\cosh x$ より，$f^{(2n-1)}(x)=\sinh x,\ f^{(2n)}(x)=\cosh x$．

2) (5点) チェビシェフ補間の誤差公式 $|p_{n-1}(x)-f(x)|\le\dfrac{2(b-a)^n}{4^n n!}\max\limits_{a\le\xi\le b}\left|f^{(n)}(\xi)\right|$ で $a=-\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2}, n\leftarrow 2n$ とする．$\cosh x$ は偶関数で，$x\ge0$ において単調増加なので，$\max\limits_{-1/2\le\xi\le1/2}|\cosh\xi|=\cosh\dfrac{1}{2}$．よって，

$$|p_{2n-1}(x)-f(x)|\le\frac{2\cdot1^{2n}}{4^{2n}(2n)!}\max_{-1/2\le\xi\le1/2}\left|f^{(2n)}(\xi)\right|=\frac{2}{4^{2n}(2n)!}\max_{-1/2\le\xi\le1/2}|\cosh\xi|=\frac{2}{4^{2n}(2n)!}\cosh\frac{1}{2}.$$

3) (10点) $|p_{2n-1}(x)-f(x)|\le\dfrac{2}{4^{2n}(2n)!}\cosh\dfrac{1}{2}=7.64\cdots\times10^{-7}<10^{-6}$．

あるいは，ヒントを用いて $|p_{2n-1}(x)-f(x)|\le\dfrac{2}{4^{2n}(2n)!}\cdot\cosh\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{4^6 6!}\cdot\dfrac{5}{4}=8.47\cdots\times10^{-7}<10^{-6}$．

解説：概数を示すときは，数値を切り上げる．$|p_{2n-1}(x)-f(x)|\le7.64\cdots\times10^{-7}<7.7\times10^{-7}<10^{-6}$ とか $|p_{2n-1}(x)-f(x)|\le8.47\cdots\times10^{-7}<8.5\times10^{-7}<10^{-6}$ として，概数を示す．

４．1) (10点) $\|A\|_\infty = \max\left\{\begin{array}{c} 100+99+100 \\ 101+100+101 \\ 100+100+99 \end{array}\right\} = 302$, $\|A^{-1}\|_\infty = \max\left\{\begin{array}{c} 200+199+1 \\ 101+100+0 \\ 100+100+1 \end{array}\right\} = 400.$

2) (10点) $\mathrm{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 302\times 400 = 120800 = 1.208\times 10^5$.

3) (10点) 成立しないことがある．最悪の場合

$$\frac{\|\Delta \boldsymbol{y}\|_\infty}{\|\boldsymbol{y}\|_\infty} = \mathrm{cond}_\infty(A)\frac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} = (1.208\times 10^5)\times 10^{-8} > 1.208\times 10^{-3} > 10^{-3}$$

となるからである．