授業コード：53B03-001	参照物：ノート1冊，教科書1冊，電卓1台	回収：解答用紙のみ

数値解析中間試験 '17.07.06

1．$|x| << 1$ のとき，以下の値を求める桁落ちの影響の小さい計算法を示せ．（各10点）

1) $\dfrac{1+x-\sqrt{1+2x}}{x^2}$，　2) $1-\cos x$，　3) $1-\cos(e^{2x}-1)$．

2．底面の半径 r，母線の長さ c の直円錐の体積は $V=\dfrac{\pi}{3}r^2\sqrt{c^2-r^2}$ である．r, c の測定値 r', c' による体積の計算値は $V'=\dfrac{\pi}{3}r'^2\sqrt{c'^2-r'^2}$ である．$\Delta r = r'-r, \Delta c = c'-c$ を測定誤差とするとき，体積の誤差 $\Delta V = V'-V$ を考える．

1) 体積の絶対誤差 $|\Delta V|$ を，測定値の絶対誤差 $|\Delta r|, |\Delta c|$ により評価せよ．（10点）

2) 体積の相対誤差 $\left|\dfrac{\Delta V}{V}\right|$ を，測定値の相対誤差 $\left|\dfrac{\Delta r}{r}\right|, \left|\dfrac{\Delta c}{c}\right|$ により評価せよ．（5点）

3) $r=1,\ c=\sqrt{3},\ \left|\dfrac{\Delta r}{r}\right|, \left|\dfrac{\Delta c}{c}\right| \le 10^{-3}$ のとき，相対誤差 $\left|\dfrac{\Delta V}{V}\right|$ を評価せよ．（5点）

3．$f(x)=\cos x$ の区間 $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ における $2n-1$ 次チェビシェフ補間を $p_{2n-1}(x)$

1) $f^{(2n)}(x)=(-1)^n\cos x$ となることを示せ．（5点）

2) 絶対誤差評価 $|p_{2n-1}(x)-f(x)| \le \dfrac{2}{4^{2n}(2n)!}$ の導出を書け．（5点）

3) $n=3$ のとき，$|p_5(x)-f(x)| < 10^{-6}$ となることを示せ．（10点）

4．線形変換 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x},\ A=\begin{pmatrix} 100 & 101 & 101 \\ 102 & 100 & 101 \\ 97 & 101 & 100 \end{pmatrix}$ を考える．$A^{-1}=\begin{pmatrix} 201 & -101 & -101 \\ 403 & -203 & -202 \\ -602 & 303 & 302 \end{pmatrix}$ である．

1) ノルム $\|A\|_1, \|A^{-1}\|_1$ を求めよ．（10点）

2) 条件数 $\mathrm{cond}_1(A)$ を求めよ．（10点）

3) 入力相対誤差 $\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1} \le 10^{-8}$ のとき，出力相対誤差 $\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{y}\|_1}{\|\boldsymbol{y}\|_1} \le 10^{-3}$ は常に成立するか？（10点）

解答と配点

1．1) (10点) $\dfrac{1+x-\sqrt{1+2x}}{x^2}=\dfrac{\left(1+x-\sqrt{1+2x}\right)\left(1+x+\sqrt{1+2x}\right)}{x^2\left(1+x+\sqrt{1+2x}\right)}=\dfrac{(1+x)^2-(1+2x)}{x^2\left(1+x+\sqrt{1+2x}\right)}=\dfrac{1}{1+x+\sqrt{1+2x}}$.

2) (10点) $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{1}{2}x$.

3) (10点) $1-\cos(e^{2x}-1)=2\sin^2\dfrac{e^{2x}-1}{2}=2\sin^2\left\{e^x\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\right\}=2\sin^2\left(e^x\sinh x\right)$.

2．1) (10点) $\dfrac{\partial V}{\partial r}=\dfrac{2\pi}{3}r\sqrt{c^2-r^2}-\dfrac{\pi r^3}{3\sqrt{c^2-r^2}}=\dfrac{\pi r(2c^2-3r^2)}{3\sqrt{c^2-r^2}},\dfrac{\partial V}{\partial c}=\dfrac{\pi cr^2}{3\sqrt{c^2-r^2}}$ と $\Delta V\cong E=\dfrac{\partial V}{\partial r}\Delta r+\dfrac{\partial V}{\partial c}\Delta c$ より．

$$|\Delta V|\cong|E|\le\left|\frac{\partial V}{\partial r}\right||\Delta r|+\left|\frac{\partial V}{\partial c}\right||\Delta c|=\left|\frac{\pi r(2c^2-3r^2)}{3\sqrt{c^2-r^2}}\right||\Delta r|+\left|\frac{\pi cr^2}{3\sqrt{c^2-r^2}}\right||\Delta c| .$$

2) (5点) 1)より， $\left|\dfrac{\Delta V}{V}\right|\cong\left|\dfrac{E}{V}\right|\le\dfrac{3}{\pi r^2\sqrt{c^2-r^2}}\left(\left|\dfrac{\pi r(2c^2-3r^2)}{3\sqrt{c^2-r^2}}\right||\Delta r|+\left|\dfrac{\pi cr^2}{3\sqrt{c^2-r^2}}\right||\Delta c|\right)=\left|\dfrac{2c^2-3r^2}{c^2-r^2}\right|\left|\dfrac{\Delta r}{r}\right|+\left|\dfrac{c^2}{c^2-r^2}\right|\left|\dfrac{\Delta c}{c}\right|$.

3) (5点) 小問2)の評価式に， $r=1,\ c=\sqrt{3}$ を代入して， $\left|\dfrac{\Delta r}{r}\right|,\left|\dfrac{\Delta c}{c}\right|\le 10^{-3}$ より，

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right|\cong\left|\frac{E}{V}\right|\le\left|\frac{2\cdot 3-3\cdot 1}{3-1}\right|\left|\frac{\Delta r}{r}\right|+\left|\frac{3}{3-1}\right|\left|\frac{\Delta c}{c}\right|=\frac{3}{2}\left|\frac{\Delta r}{r}\right|+\frac{3}{2}\left|\frac{\Delta c}{c}\right|\le\frac{3}{2}10^{-3}+\frac{3}{2}10^{-3}=3\times 10^{-3} .$$

3．1) (5点) $f^{(2)}(x)=-\cos x, f^{(4)}(x)=\cos x, f^{(6)}(x)=-\cos x$ より， $f^{(2n)}(x)=(-1)^n\cos x$.

または，公式 $\dfrac{d^k}{dx^k}\cos x=\cos\left(x+\dfrac{k\pi}{2}\right)$ より， $f^{(2n)}(x)=\dfrac{d^{2n}}{dx^{2n}}\cos x=\cos(x+n\pi)=(-1)^n\cos x$.

2) (5点) チェビシェフ補間の誤差公式 $|p_{n-1}(x)-f(x)|\le\dfrac{2(b-a)^n}{4^n n!}\max\limits_{a\le\xi\le b}\left|f^{(n)}(\xi)\right|$ で $a=-1/2,b=1/2,n\leftarrow 2n$ とすると， $\max\limits_{-1/2\le\xi\le 1/2}|\cos\xi|=\cos 0=1$ であるから，

$$|p_{2n-1}(x)-f(x)|\le\frac{2\cdot 1^{2n}}{4^{2n}(2n)!}\max_{-1/2\le\xi\le 1/2}\left|f^{(2n)}(\xi)\right|=\frac{2}{4^{2n}(2n)!}\max_{-1/2\le\xi\le 1/2}|\cos\xi|=\frac{2}{4^{2n}(2n)!}.$$

3) (10点) $|p_{2n-1}(x)-f(x)|\le\dfrac{2}{4^{2n}(2n)!}=\dfrac{2}{4^6 6!}=6.78\cdots\times 10^{-7}<10^{-6}$.

4．1) (10点) $\|A\|_1=\max\left\{\begin{matrix}100\\+\\102\\+\\97\end{matrix},\begin{matrix}101\\+\\100\\+\\101\end{matrix},\begin{matrix}101\\+\\101\\+\\100\end{matrix}\right\}=302,\ \left\|A^{-1}\right\|_1=\max\left\{\begin{matrix}201\\+\\403\\+\\602\end{matrix},\begin{matrix}101\\+\\203\\+\\303\end{matrix},\begin{matrix}101\\+\\202\\+\\302\end{matrix}\right\}=1206.$

2) (10点) $\mathrm{cond}_1(A)=\|A\|_1\left\|A^{-1}\right\|_1=302\times 1206=364212$.

3) (10点) 成立しないことがある．最悪の場合

$$\frac{\|\Delta \boldsymbol{y}\|_1}{\|\boldsymbol{y}\|_1}=\mathrm{cond}_1(A)\frac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1}=364212\times 10^{-8}>3.64212\times 10^{-3}>10^{-3}$$

となるからである．