授業コード：73305-001	参照物：ノート1冊，教科書1冊，電卓1台	回収：解答用紙のみ

数値解析中間試験 ’16.06.06

1．$|x| << 1$ のとき，以下の値を求める桁落ちの影響の小さい計算法を示せ．（各10点）

1) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$，　2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)-\dfrac{1}{2}$，　3) $\dfrac{\sin e^{2x}-\sin 1}{2}$．

2．底面の半径 r，高さ h の直円錐の体積は $V=\dfrac{\pi}{3}r^2h$ である． r, h の測定値 r', h' による体積の計算値は

$V'=\dfrac{\pi}{3}r'^2h'$ である． $\Delta r=r'-r, \Delta h=h'-h$ を測定誤差とするとき，体積の誤差 $\Delta V=V'-V$ を考える．

1) 体積の絶対誤差 $|\Delta V|$ を，測定値の絶対誤差 $|\Delta r|, |\Delta h|$ により評価せよ．（10点）

2) 体積の相対誤差 $\left|\dfrac{\Delta V}{V}\right|$ を，測定値の相対誤差 $\left|\dfrac{\Delta r}{r}\right|, \left|\dfrac{\Delta h}{h}\right|$ により評価せよ．（5点）

3) $r=1,\ h=2,\ \left|\dfrac{\Delta r}{r}\right|, \left|\dfrac{\Delta h}{h}\right| \le 10^{-3}$ のとき，相対誤差 $\left|\dfrac{\Delta V}{V}\right|$ を評価せよ．（5点）

3． $f(x)=e^x$ の定積分 $If=\int_0^1 f(x)dx=e-1$ の近似値を複合中点則 M_mf で計算する．

1) $M_mf=h\sum_{i=1}^{m}e^{(i-1/2)h}$ …①　となることを示せ．ここで， $h=1/m$ である．（10点）

2) ①は公比 e^h の等比級数である． $M_mf=\dfrac{he^{h/2}}{e^h-1}(e-1)$ となることを示せ．（5点）

3) $\lim_{m\to\infty} M_mf=e-1=\int_0^1 e^x\,dx$ を証明せよ．（5点）

4．線形変換 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$，$A=\begin{pmatrix} 200 & 201 & 202 \\ 201 & 202 & 203 \\ 200 & 199 & 199 \end{pmatrix}$ を考える． $A^{-1}=\begin{pmatrix} 199 & -199 & 1 \\ -601 & 600 & -2 \\ 401 & -400 & 1 \end{pmatrix}$ である．

1) ノルム $\|A\|_\infty, \|A^{-1}\|_\infty$ を求めよ．（10点）

2) 条件数 $\mathrm{cond}_\infty(A)$ を求めよ．（10点）

3) 入力相対誤差 $\dfrac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} \le 10^{-8}$ のとき，出力相対誤差 $\dfrac{\|\Delta \boldsymbol{y}\|_\infty}{\|\boldsymbol{y}\|_\infty} \le 10^{-2}$ は常に成立するか？（10点）

解答と配点

１．1) (10点) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\dfrac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$．

2) (10点) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)-\dfrac{1}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)-\sin\dfrac{\pi}{6}=2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{x}{2}\right)\sin\dfrac{x}{2}$．

3) (10点) $\dfrac{\sin e^{2x}-\sin 1}{2}=\cos\dfrac{e^{2x}+1}{2}\sin\dfrac{e^{2x}-1}{2}=\cos\dfrac{e^{2x}+1}{2}\sin\left(e^x\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\cos\dfrac{e^{2x}+1}{2}\sin\left(e^x\sinh x\right)$．

２．1) (10点) $\varDelta V\cong E=\dfrac{\partial V}{\partial r}\varDelta r+\dfrac{\partial V}{\partial h}\varDelta h$ より． $|\varDelta V|\cong|E|\le\left|\dfrac{\partial V}{\partial r}\right||\varDelta r|+\left|\dfrac{\partial V}{\partial h}\right||\varDelta h|=\left|\dfrac{2\pi}{3}rh\right||\varDelta r|+\left|\dfrac{\pi}{3}r^2\right||\varDelta h|$．

2) (5点) 小問1)より， $\left|\dfrac{\varDelta V}{V}\right|\cong\left|\dfrac{E}{V}\right|\le\left|\dfrac{\frac{2\pi}{3}rh}{\frac{\pi}{3}r^2h}r\right|\left|\dfrac{\varDelta r}{r}\right|+\left|\dfrac{\frac{\pi}{3}r^2}{\frac{\pi}{3}r^2h}h\right|\left|\dfrac{\varDelta h}{h}\right|=2\left|\dfrac{\varDelta r}{r}\right|+\left|\dfrac{\varDelta h}{h}\right|$．

3) (5点) 小問2)より， $\left|\dfrac{\varDelta V}{V}\right|\cong\left|\dfrac{E}{V}\right|\le 2\left|\dfrac{\varDelta r}{r}\right|+\left|\dfrac{\varDelta h}{h}\right|=2\times10^{-3}+1\times10^{-3}=3\times10^{-3}$．

３．1) (10点) $c_i=(i-1/2)h\ \ (1\le i\le m)$ として，

$$M_m f=h\sum_{i=1}^{m}f(c_i)=h\sum_{i=1}^{m}f((i-1/2)h)=h\sum_{i=1}^{m}e^{(i-1/2)h}\ .$$

2) (5点) 総和は公比 e^h の等比級数．また， $mh=1$ であるから，

$$M_m f=h\sum_{i=1}^{m}e^{(i-1/2)h}=h\frac{(e^{h(m+1/2)}-e^{h/2})}{e^h-1}=\frac{he^{h/2}(e^{mh}-1)}{e^h-1}=\frac{he^{h/2}}{e^h-1}(e-1)\ .$$

3) (5点) $m\to\infty$ で， $h\to0$ ゆえ， $\displaystyle\lim_{m\to\infty}M_m f=\lim_{h\to0}\frac{he^{h/2}}{e^h-1}(e-1)=(e-1)\lim_{h\to0}\frac{h}{e^h-1}\overset{L}{=}(e-1)\lim_{h\to0}\frac{1}{e^h}=e-1$．

ここで，等号 $\overset{L}{=}$ はロピタルの定理を用いた．公式 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ を使うのもよい．

４．1) (10点) $\|A\|_\infty=\max\begin{Bmatrix}200+201+202\\201+202+203\\200+199+199\end{Bmatrix}=606,\ \ \|A^{-1}\|_\infty=\max\begin{Bmatrix}199+199+1\\601+600+2\\401+400+1\end{Bmatrix}=1203.$

2) (10点) $\mathrm{cond}_\infty(A)=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty=606\cdot1203=729018<7.3\times10^5$．

3) (10点)成立する．なぜなら， $\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}=10^{-8}$ なら，

$$\frac{\|\Delta\boldsymbol{y}\|_\infty}{\|\boldsymbol{y}\|_\infty}\le\mathrm{cond}_\infty(A)\frac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}<7.3\times10^5\times10^{-8}=7.3\times10^{-3}<10^{-2}\ .$$