授業コード：73305-001	参照物：ノート1冊，教科書1冊，電卓1台	回収：解答用紙のみ

数値解析中間再試金5’15.06.26

１．$|x| << 1$ のとき，以下の値を求める桁落ちの影響の小さい計算法を示せ．

1) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$，　　2) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-1$，　　3) $e^{\sqrt{1+x}}-e^{\sqrt{1-x}}$．

２．四角錐のピラミッドの底面が1辺 $a(m)$ の正方形，その頂点が，底面と同じ標高のある地点から眺めて，仰角 θ (ラジアン)，距離 $l(m)$ なら，その体積は $V=\dfrac{1}{3}a^2 l\sin\theta\,(m^3)$ である．これらを測定したところ，$\tilde{a}=230\cong a, \tilde{\theta}=\dfrac{\pi}{4}\cong\theta, \tilde{l}=300\cong l$ で，体積は $\tilde{V}=\dfrac{1}{3}\tilde{a}^2\tilde{l}\sin\tilde{\theta}=3.74\times10^6(m^3)$ と計算された．測定誤差を $\Delta a,\Delta l,\Delta\theta$，体積の誤差を ΔV とするとき，次の問に答えよ．

1) 体積の絶対誤差 $|\Delta V|$ を，測定値の絶対誤差 $|\Delta a|,|\Delta l|,|\Delta\theta|$ により評価せよ．

2) 体積の相対誤差 $\left|\dfrac{\Delta V}{V}\right|$ を，測定値の相対誤差 $\left|\dfrac{\Delta a}{a}\right|,\left|\dfrac{\Delta l}{l}\right|,\left|\dfrac{\Delta\theta}{\theta}\right|$ により評価せよ．

3) $\left|\dfrac{\Delta a}{a}\right|,\left|\dfrac{\Delta l}{l}\right|,\left|\dfrac{\Delta\theta}{\theta}\right|\le10^{-3}$ のとき，相対誤差 $\left|\dfrac{\Delta V}{V}\right|$ を評価せよ．

4) $\tilde{V}$ の精度を上げるためには，どの測定値の精度を上げるのが効果的か考察せよ．

３．関数 $f(x)=\log(1+x)$ の区間 $[-1/2,1/2]$ における $n-1$ 次チェビシェフ補間を $p_{n-1}(x)$ とする．

1) $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ $(n\ge1)$ を帰納法で示せ．

2) 絶対誤差 $|p_{n-1}(x)-f(x)|$ を評価せよ．

3) $n=10$ のとき，$|p_{n-1}(x)-f(x)|<2\times10^{-4}$ となることを示せ．

４．線形変換 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}, A=\begin{pmatrix}\frac12&\frac15&\frac16\\ \frac13&\frac16&\frac17\\ \frac14&\frac17&\frac18\end{pmatrix}$ を考える．$A^{-1}=\begin{pmatrix}30&-84&56\\-420&1470&-1120\\420&-1512&1176\end{pmatrix}$ である．

1) ノルム $\|A\|_1,\|A^{-1}\|_1$ を求めよ．

2) 条件数 $\mathrm{cond}_1(A)$ を求めよ．

3) 入力相対誤差 $\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1}\le10^{-6}$ とする．このとき，出力相対誤差 $\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{y}\|_1}{\|\boldsymbol{y}\|_1}\le3.5\times10^{-3}$ が常に成立するかどうか検証せよ．

授業コード：73305-001	参照物：ノート1冊，教科書1冊，電卓1台	回収：解答用紙のみ

解答と配点

１．1) (10点) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}=\dfrac{x(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x})^2-1^2}=\sqrt{1+x}+1$，

2) (10点) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-1=\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}-1=\dfrac{2\tan x}{1-\tan x}\left(=\dfrac{\sqrt{2}\sin x}{\cos(\pi/4+x)}\right)$，

3) (10点) $e^{\sqrt{1+x}}-e^{\sqrt{1-x}}=2e^{\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}}\sinh\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}=2e^{\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}}\sinh\dfrac{x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$．

２．1) (5点) $\Delta V\cong E=\dfrac{\partial V}{\partial a}\Delta a+\dfrac{\partial V}{\partial l}\Delta l+\dfrac{\partial V}{\partial\theta}\Delta\theta=\dfrac{2}{3}al\Delta a\sin\theta+\dfrac{1}{3}a^2\Delta l\sin\theta+\dfrac{1}{3}a^2l\Delta\theta\cos\theta.$

これより，$|\Delta V|\cong|E|=\dfrac{2}{3}|al\sin\theta||\Delta a|+\dfrac{1}{3}|a^2\sin\theta||\Delta l|+\dfrac{1}{3}|a^2l\cos\theta||\Delta\theta|.$

2) (5点) $V=\dfrac{1}{3}a^2l\sin\theta$ だから，$\left|\dfrac{\Delta V}{V}\right|\cong\left|\dfrac{E}{V}\right|=\dfrac{|E|}{\frac{1}{3}a^2l\sin\theta}\le 2\left|\dfrac{\Delta a}{a}\right|+\left|\dfrac{\Delta l}{l}\right|+\theta\cot\theta\left|\dfrac{\Delta\theta}{\theta}\right|.$

3) (5点) $\left|\dfrac{\Delta V}{V}\right|\cong\left|\dfrac{E}{V}\right|\le 2\cdot10^{-3}+10^{-3}+\dfrac{\pi}{4}10^{-3}<2\times10^{-3}+10^{-3}+0.79\times10^{-3}=3.79\times10^{-3}.$

4) (5点) V の相対誤差に対する影響は，a に関する相対誤差が一番大きい．ゆえに，a の精度を上げるのが効果的である．

３．1) (5点) $n=1$ なら $f'(x)=(\log(1+x))'=1/(1+x)$ で成立．ある $n\ge1$ で $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ なら，両辺を微分して $f^{(n+1)}(x)=\dfrac{-n(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^{n+1}}=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ ゆえ $n+1$ でも成立する．

2) (5点) $\left|p_{n-1}(x)-f(x)\right|\le\dfrac{2(1/2-(-1/2))^n}{4^n n!}\max\limits_{-1/2\le t\le 1/2}\left|f^{(n)}(t)\right|$

$$=\frac{2(1/2-(-1/2))^n}{4^n n!}\frac{(n-1)!}{(1-1/2)^n}=\frac{1}{n2^{n-1}}$$

3) (10点) $\left|p_9(x)-f(x)\right|\le\dfrac{1}{10\times2^9}=\dfrac{1}{10\times512}<\dfrac{1}{10\times500}=2\times10^{-4}$

４．1) (10点) $\|A\|_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{12},\ \left\|A^{-1}\right\|_1=84+1470+1512=3066.$

2) (10点) $\mathrm{cond}_1(A)=\|A\|_1\left\|A^{-1}\right\|_1=\dfrac{13}{12}3066=\dfrac{6643}{2}=3321.5$ ．

3) (10点)常に成立すると．なぜなら，$\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}\le10^{-6}$ のとき以下の不等式が成立する．

$$\frac{\|\Delta\boldsymbol{y}\|_1}{\|\boldsymbol{y}\|_1}\le\mathrm{cond}_1(A)\frac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1}\le3321.5\times10^{-6}<3.5\times10^{-3}.$$