授業コード：72371-001，73305-001	参照物：ノート1冊，教科書1冊，電卓1台	回収：解答用紙のみ

数値解析中間試験 ’14.06.09

1．$|x| << 1$ のとき，以下の値を求める桁落ちの影響の小さい計算法を示せ.

1) $\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$,　　2) $\cos(a+x)-\cos(a-x)$,　　3) $e^1 - e^{\cos x}$.

2．三角形 ΔABC で， $\mathrm{AB}=c$, $\mathrm{AC}=b$, $\angle \mathrm{A}=\alpha$ のとき， $\mathrm{BC}=a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}$ である． α, b, c の測定値 $\alpha'=\alpha+\Delta\alpha$, $b'=b+\Delta b$, $c'=c+\Delta c$ による近似値 $a'=\sqrt{b'^2+c'^2-2b'c'\cos\alpha'}$ の誤差 $\Delta a = a'-a$ を考える.

1) Δa の近似式 $\Delta a \cong E = \dfrac{bc\sin\alpha}{a}\Delta\alpha + \dfrac{b-c\cos\alpha}{a}\Delta b + \dfrac{c-b\cos\alpha}{a}\Delta c$ を導け.

2) a' の相対誤差 $\left|\dfrac{\Delta a}{a}\right|$ を，測定値の相対誤差 $\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\alpha}\right|, \left|\dfrac{\Delta b}{b}\right|, \left|\dfrac{\Delta c}{c}\right|$ により評価せよ.

3) $\alpha=\dfrac{\pi}{3}, b=c, \left|\dfrac{\Delta\alpha}{\alpha}\right| \le 10^{-3}, \left|\dfrac{\Delta b}{b}\right| \le 10^{-3}, \left|\dfrac{\Delta c}{c}\right| \le 10^{-3}$ のとき，相対誤差 $\left|\dfrac{\Delta a}{a}\right|$ を評価せよ.

（計算のヒント：3)の ΔABC は正三角形で， $a=b=c$ である．）

3．関数 $f(x)=\log(1+x)$ の区間 $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ における $n-1$ 次チェビシェフ補間を $p_{n-1}(x)$ とする.

1) $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ を示せ.

2) 絶対誤差評価 $|p_{n-1}(x)-f(x)| \le \dfrac{2}{6^n n}$ の導出を書け.

3) $n=5$ のとき， $|p_4(x)-f(x)| < 6\times 10^{-5}$ となることを示せ.

4．線形変換 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}, A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ を考える． $A^{-1}=\begin{pmatrix} 36 & 180 & 168 \\ 105 & 630 & 630 \\ 72 & 480 & 504 \end{pmatrix}$ である.

1) ノルム $\|A\|_\infty, \|A^{-1}\|_\infty$ を求めよ.

2) 条件数 $\mathrm{cond}_\infty(A)$ を求めよ.

3) 入力相対誤差 $\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} \le 10^{-6}$ とする．このとき，出力相対誤差 $\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{y}\|_\infty}{\|\boldsymbol{y}\|_\infty} \le 10^{-3}$ が常に成立するかどうか検証せよ.

解答と配点

1．1) (10点) $\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}=\dfrac{x(\sqrt{1+2x}+1)}{(\sqrt{1+2x}-1)(\sqrt{1+2x}+1)}=\dfrac{x(\sqrt{1+2x}+1)}{2x}=\dfrac{\sqrt{1+2x}+1}{2}$.

2) (10点) $\cos(a+x)-\cos(a-x)=-2\sin a\sin x$.

3) (10点) $e^{1}-e^{\cos x}=e^{\frac{1+\cos x}{2}}\left(e^{\frac{1-\cos x}{2}}-e^{-\frac{1-\cos x}{2}}\right)=2e^{\frac{1+\cos x}{2}}\sinh\left(\dfrac{1-\cos x}{2}\right)=2e^{\frac{1+\cos x}{2}}\sinh\left(\sin^2\dfrac{x}{2}\right)$.

2．1) (10点) $\dfrac{\partial a}{\partial\alpha}=\dfrac{2bc\sin\alpha}{2\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}=\dfrac{bc\sin\alpha}{a}$.

$$\frac{\partial a}{\partial b}=\frac{2b-2c\cos\alpha}{2\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}=\frac{b-c\cos\alpha}{a},$$
$$\frac{\partial a}{\partial c}=\frac{2c-2b\cos\alpha}{2\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}=\frac{c-b\cos\alpha}{a}.$$

よって,

$$\Delta a\cong E=\frac{\partial a}{\partial\alpha}\Delta\alpha+\frac{\partial a}{\partial b}\Delta b+\frac{\partial a}{\partial c}\Delta c=\frac{bc\sin\alpha}{a}\Delta\alpha+\frac{b-c\cos\alpha}{a}\Delta b+\frac{c-b\cos\alpha}{a}\Delta c\ .$$

2) (5点)上式の両辺を a で割り，絶対値を取ると,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Delta a}{a}\right|\cong\left|\frac{E}{a}\right|&=\left|\frac{bc\sin\alpha}{a^2}\Delta\alpha+\frac{b-c\cos\alpha}{a^2}\Delta b+\frac{c-b\cos\alpha}{a^2}\Delta c\right|\\&=\left|\frac{\alpha bc\sin\alpha}{a^2}\cdot\frac{\Delta\alpha}{\alpha}+\frac{b^2-bc\cos\alpha}{a^2}\cdot\frac{\Delta b}{b}+\frac{c^2-bc\cos\alpha}{a^2}\cdot\frac{\Delta c}{c}\right|\\&\le\left|\frac{\alpha bc\sin\alpha}{a^2}\right|\left|\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right|+\left|\frac{b^2-bc\cos\alpha}{a^2}\right|\left|\frac{\Delta b}{b}\right|+\left|\frac{c^2-bc\cos\alpha}{a^2}\right|\left|\frac{\Delta c}{c}\right|.\end{aligned}$$

3) (5点) ΔABC は正三角形で $a=b=c$ ゆえ,

$$\left|\frac{\Delta a}{a}\right|\cong\left|\frac{E}{a}\right|\le|\alpha\sin\alpha|\left|\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right|+|1-\cos\alpha|\left|\frac{\Delta b}{b}\right|+|1-\cos\alpha|\left|\frac{\Delta c}{c}\right|\le\left\{\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+2\left(1-\frac{1}{2}\right)\right\}10^{-3}=1.9\cdots\times10^{-3}<2\times10^{-3}\ .$$

3．1) (5点) $f'(x)=\dfrac{1}{1+x},f^{(2)}(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2},f^{(3)}(x)=\dfrac{(-1)(-2)}{(1+x)^3},\cdots,f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)(-2)\cdots(-n+1)}{(1+x)^n}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$.

2) (5点) $|p_{n-1}(x)-f(x)|\le\dfrac{2(1/4-(-1/4))^n}{4^n n!}\max\limits_{-1/4\le t\le1/4}\left|\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^n}\right|=\dfrac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{4^n n!}\dfrac{(n-1)!}{(1-1/4)^n}=\dfrac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{4^n n!}\dfrac{(n-1)!}{\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\dfrac{2}{6^n n}$.

3) (10点) $|p_4(x)-f(x)|\le\dfrac{2}{6^5\cdot5}=5.1\cdots\times10^{-5}<6\times10^{-5}$.

4．1) (10点) $\|A\|_\infty=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{12},\|A^{-1}\|_\infty=105+630+630=1365.$

2) (10点) $\mathrm{cond}_\infty(A)=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty=\dfrac{13}{12}1365=\dfrac{5915}{4}=1478.75$.

3) (10点)成立しないことがある．なぜなら， $\dfrac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} = 10^{-6}$ でも，

$$\frac{\|\Delta \boldsymbol{y}\|_\infty}{\|\boldsymbol{y}\|_\infty} = \mathrm{cond}_\infty(A)\frac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} = 1478.75 \times 10^{-6} = 1.47875 \times 10^{-3} > 10^{-3}$$

が成立することがある．