授業コード：53B03-001	＜参照物＞ ノート：1冊．A4版．体裁不問． 教科書：1冊．何でもよし． 電　卓：1台．通信機能無し．	回収：解答用紙のみ

数値解析　　定期試験　　'18.07/28

１．1000×1000 行列 A と 1000 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が与えられたとする．

1) $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ の計算法 $\boldsymbol{z} = \left(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right)$ の計算量を比較せよ．（10点）

2) $\boldsymbol{z} = A^2\boldsymbol{x}$ の効率的な計算法を示し，計算量を述べよ．（10点）

２．n 次正則行列 A と n 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ が与えられている．

1) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解くLU分解法の計算法と計算量を示せ．（10点）

2) A のLU分解 $A = P^{-1}LU$ が与えられているとする．このとき，方程式 $\begin{pmatrix} A & A \\ O & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}$ を解く効率的な計算法と計算量を示せ(LU分解の計算量は含めない)．（10点）

３．LU分解法における部分ピボット選択の効果を説明せよ．（10点）

４．方程式 $f(x) = \cos x - \tan x$ を2分法で解く．解を $x = \alpha$ とする．初期区間を $[a_0, b_0] = [0, \pi/4]$ とし，区間列 $\{[a_k, b_k]\}_{k\geq 1}$ を2分法のアルゴリズムに従って作ってゆく．k は分割回数である．このとき，区間中点を $c_k = (a_k + b_k)/2$ とする．

1) 区間 $[0, \pi/4]$ が初期区間として適切であることを示せ．（10点）

2) $|c_k - \alpha| \leq 10^{-3}$ が保証できる整数 k で，最小のものを示せ．（10点）

５．ニュートン法により方程式 $f(x) = \dfrac{1}{x} - a\ (a > 0)$ を解く．解は $x = a^{-1}$，すなわち a の逆数である．x_0 を初期値としてニュートン法で作られる近似列を $\{x_k\}_{k\geq 0}$ とし，誤差を $e_k = x_k - a^{-1}$ と書く．

1) x_k から x_{k+1} を計算する反復式 $x_{k+1} = x_k(2 - ax_k)$ …①を導け．（10点）

2) 関係式 $1 - ax_{k+1} = (1 - ax_k)^2$ …②を導け．（10点）

3) $e_{k+1} = -ae_k^2$ を示せ．（5点）

4) $\{x_k\}_{k\geq 0}$ の収束次数は何次か．（5点）

解説：この逆数計算法は，加減乗算を持つが除算を持たない計算システムで有効である．

解答

1．1) イ： $\boldsymbol{z} = \left(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T\right)\boldsymbol{x}$ で計算．計算量総計： 2×10^6 *flops*

内訳： $A = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T\,(1000\times 1000 = 10^6\ flops),\ \boldsymbol{z} = A\boldsymbol{x}\,(1000\times 1000 = 10^6\ flops).$

ロ： $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}\right)$ で計算．計算量総計： 2×10^3 *flops*

内訳： $q = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}(1000 = 10^3\ flops),\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}q\,(1000 = 10^3\ flops).$

後者の計算量は前者の1/1000である．

2) $\boldsymbol{z} = A(A\boldsymbol{x})$ で計算する．計算手順と計算量は以下の通り．

① $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}\,(1000\times 1000 = 10^6\ flops)$,

② $\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{y}\,(1000\times 1000 = 10^6\ flops)$.

計算量合計： $2\times 10^6\ flops$.

＜解説＞ $\boldsymbol{z} = (AA)\boldsymbol{x}$ の計算量は約500倍になる．計算手順と計算量は以下のようになる．

① $B = AA\,(1000\times 1000\times 1000 = 10^9\ flops)$,

② $\boldsymbol{z} = B\boldsymbol{y}\,(1000\times 1000 = 10^6\ flops)$.

計算量合計： $1001\times 10^6\ flops$.

2．1)　計算法：① LU分解： $A = P^{-1}LU$　　$(\frac{1}{3}n^3 + O(n^2)\ flops)$.

② LU求解： $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$　　$(n^2\ flops)$ （①で計算した P, L, U を使う．）

の2ステップで方程式を解く．計算量は $\frac{1}{3}n^3 + O(n^2)\ flops$ である．

2) 方程式をブロック成分ごとに書くと， $A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_1,\ A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2$ ．$\therefore A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$.

ゆえに， $\boldsymbol{x}_1 = A^{-1}(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2),\ \boldsymbol{x}_2 = A^{-1}\boldsymbol{b}_2$ ． A のLU分解 $A = P^{-1}LU$ を利用する．

(1) $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$.　　： $0\ flops$.

(2) $\boldsymbol{x}_1 = A^{-1}\boldsymbol{c}$ をLU求解で計算.　　： $n^2\ flops$.

(3) $\boldsymbol{x}_2 = A^{-1}\boldsymbol{b}_2$ をLU求解で計算.　　： $n^2\ flops$.

で計算できる．計算量は $2n^2\ flops$.

3．① ピボット要素 $a_{kk} \neq 0$ とする．② 計算における誤差の拡大を防ぐ．

４．1) $f(0)=\cos 0-\tan 0=1>0$, $f(\pi/4)=\cos(\pi/4)-\tan(\pi/4)=1/\sqrt{2}-1<0$.$\therefore f(0)f(\pi/4)\le 0$. ゆえに，適切.

2) $2^9=512<\dfrac{b_0-a_0}{\varepsilon}=\dfrac{\pi/4}{10^{-3}}=785.3\cdots<1024=2^{10}$ より，

$$k=\left\lceil \log_2\frac{b_0-a_0}{\varepsilon}\right\rceil-1=10-1=\underline{\underline{9}}.$$

５．1) $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\dfrac{x_k^{-1}-a}{-x_k^{-2}}=x_k-\left(-x_k+ax_k^2\right)=x_k(2-ax_k)$.

2) $1-ax_{k+1}=1-ax_k(2-ax_k)=1-2ax_k+a^2x_k^2=(1-ax_k)^2$.

3) 2)より，

$$e_{k+1}=x_{k+1}-a^{-1}=-a^{-1}(1-ax_{k+1})\overset{2)}{=}-a^{-1}(1-ax_k)^2=-a\left(a^{-1}(1-ax_k)\right)^2=-a\left(-a^{-1}+x_k\right)^2=-ae_k^2.$$

4) 3)より，$\left|x_{k+1}-a^{-1}\right|=\left|e_{k+1}\right|=|a|\left|e_k\right|^2=\left|x_k-a^{-1}\right|^2$. ゆえに，収束次数は2である.