授業コード：53B03-001	＜参照物＞ ノート：1冊．A4以下体裁不問． 教科書：1冊．何でもよし． 電　卓：1台．通信機能無し．	回収：解答用紙のみ

数値解析　　定期試験　　'17.08/03

１．10×1000 行列 A, B と 1000 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が与えられたとする．次の問に答えよ．

答えは10進浮動小数点数 ($d_0.d_1 \cdots \times 10^E$ flops, $1 \le d_0 \le 9$) の形式で書け．

1) $q = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} B \boldsymbol{x}$ の効率的な計算法を示し，計算量を示せ．（10点）

2) $C = AB^{\mathrm{T}}A$ の計算法 $C = (AB^{\mathrm{T}})A$ と $C = A(B^{\mathrm{T}}A)$ の計算量を比較せよ．（10点）

２．n 次正則行列 A と n 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ が与えられている．

1) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解くLU分解法の計算法と計算量を示せ．（10点）

2) A のLU分解 $A = P^{-1}LU$ が与えられているとする．このとき，方程式 $\begin{pmatrix} A & O \\ \pi I & A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}$

を解く効率的な計算法と計算量を示せ(LU分解の計算量は含めない)．（10点）

３．線形方程式の解法である逆行列法の欠点を述べよ．（10点）

４．方程式 $f(x) = e^{-x} - \log x = 0$ を2分法で解く．解を $x = \alpha$ とする．初期区間を $[a_0, b_0]$ とし，区間列 $\{[a_k, b_k]\}_{k \ge 1}$ を2分法のアルゴリズムに従って作ってゆく．k は分割回数である．このとき，区間中点を $c_k = (a_k + b_k)/2$ とする．

1) 区間 $[1, e]$ が初期区間として適切であることを示せ．（10点）

2) $|c_k - \alpha| \le 10^{-3}$ が保証できる整数 k で，最小のものを示せ．（10点）

ふ な 一羽二羽一羽二羽

自然対数の底は $e = 2.7182818284590\cdots$ である．

５．方程式 $f(x) = e^x - x - 2 = 0$ を考える．解は $x = \alpha = 1.1\cdots > 1$ である．

$x_0 \cong \alpha$ を初期値としてニュートン法で作られる近似解の列を $\{x_k\}_{k \ge 0}$ とする．初期値 x_0 が $x_0 > \alpha$ を満たすとき，$\{x_k\}_{k \ge 0}$ は単調減少して α に収束することを示そう．

1) x_k から x_{k+1} を計算する反復式 $x_{k+1} = u(x_k)$, $u(x) = \dfrac{(x-1)e^x + 2}{e^x - 1}$ を導け．（10点）

2) $x_k > \alpha$ なら，$x_{k+1} < x_k$ となることを示せ．（10点）

3) $x_k > \alpha$ なら，$x_{k+1} > \alpha$ となることを示せ．（10点）

ヒント2)：$f(\alpha) = 0, f'(x) > 0\ (x > \alpha)$ より，$f(x) > 0\ \ (x > \alpha)$ を示す．

ヒント3)：$u(\alpha) = \alpha,\ u'(x) > 0\ (x > \alpha)$ より，$u(x) > \alpha\ \ (x > \alpha)$ を示す．

解答

1． 1) ① $q = (A\boldsymbol{y})^T (B\boldsymbol{x})$ で計算．計算量総計： 2.001×10^4 *flops* 最良

内訳： $\boldsymbol{u} = B\boldsymbol{x}$ $(10 \times 1000 = 10^4\ \textit{flops})$, $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{y}$ $(10 \times 1000 = 10^4\ \textit{flops})$, $q = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{u}$ $(10\ \textit{flops})$.

② $q = \boldsymbol{y}^T \left(A^T (B\boldsymbol{x})\right)$ で計算．計算量総計： 2.1×10^4 *flops* 良

内訳： $\boldsymbol{u} = B\boldsymbol{x}$ $(10 \times 1000 = 10^4\ \textit{flops})$, $\boldsymbol{v} = A^T \boldsymbol{u}$ $(1000 \times 10 = 10^4\ \textit{flops})$, $q = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{v}$ $(1000\ \textit{flops})$.

③ $q = \boldsymbol{y}^T \left((A^T B)\boldsymbol{x}\right)$ で計算．計算量総計： 1.1001×10^7 *flops* 最悪

内訳： $C = A^T B$ $(10^3 \times 10 \times 10^3 = 10^7\ \textit{flops})$, $\boldsymbol{u} = C\boldsymbol{x}$ $(10^3 \times 10^3 = 10^6\ \textit{flops})$, $q = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{u}$ $(10^3\ \textit{flops})$.

2) ① $C = (AB^T)A$: $D = AB^T$ $(10 \times 1000 \times 10 = 10^5\ \textit{flops})$, $C = DA$ $(10 \times 10 \times 1000 = 10^5\ \textit{flops})$.

計 $10^5 + 10^5 = 2 \times 10^5$ *flops*.

② $C = A(B^T A)$: $D = B^T A$ $(1000 \times 10 \times 1000 = 10^7\ \textit{flops})$, $C = AD$ $(10 \times 1000 \times 1000 = 10^7\ \textit{flops})$.

計 $10^7 + 10^7 = 2 \times 10^7$ *flops*.

①は②の1/100の計算量であり，②より優れた計算法である．

2． 1) 計算法：(1) LU分解： $A = P^{-1}LU$ $\left(\frac{1}{3}n^3 + O(n^2)\ \textit{flops}\right)$.

(2) LU求解： $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ $(n^2\ \textit{flops})$ （(1)で計算した P, L, U を使う．）

の2ステップで方程式を解く．計算量は $\frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$ *flops* である．

2) 方程式をブロック成分ごとに書くと， $A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}_1$, $\pi \boldsymbol{x}_1 + A^2 \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2$. $\therefore A^2 \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2 - \pi \boldsymbol{x}_1$.

ゆえに， $\boldsymbol{x}_1 = A^{-1}\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{x}_2 = A^{-1}(A^{-1}(\boldsymbol{b}_2 - \pi \boldsymbol{x}_1))$. A のLU分解 $A = P^{-1}LU$ を利用する．

(1) $\boldsymbol{x}_1 = A^{-1}\boldsymbol{b}_1$ をLU求解で計算． ： n^2 *flops*.

(2) $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}_2 - \pi \boldsymbol{x}_1$ を計算． ： n *flops*.

(3) $\boldsymbol{d} = A^{-1}\boldsymbol{c}$ をLU求解で計算． ： n^2 *flops*.

(4) $\boldsymbol{x}_2 = A^{-1}\boldsymbol{d}$ をLU求解で計算． ： n^2 *flops*.

で計算できる．計算量は $3n^2 + n$ *flops*.

3． ① 計算量が多い(LU分解法の約3倍)．② メモリー使用量が多い．③ 計算誤差が大きい．

4． 1) $f(1) = \underbrace{e^1}_{e} - \underbrace{\log 1}_{0} = e > 0,\ f(e) = \underbrace{e^{-e}}_{<1} - \underbrace{\log e}_{1} < 0. \therefore f(1)f(e) < 0.$ ゆえに，適切．

2) $2^{10} = 1024 < \dfrac{b_0 - a_0}{\varepsilon} = \dfrac{e-1}{10^{-3}} = 1718.\cdots < 2048 = 2^{11}$ より，

$$k = \left\lceil \log_2 \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \right\rceil - 1 = 11 - 1 = 10.$$

5．1）$x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\dfrac{e^{x_k}-x_k-2}{e^{x_k}-1}=\dfrac{(x_k-1)e^{x_k}+2}{e^{x_k}-1}$.

2) $f(\alpha)=0$, $f'(x)=e^x-1>0\ (x>0)$ だから， $f(x)=\int_\alpha^x f'(t)dt>0\ \ (x>\alpha)$．したがって， $x_k>\alpha$ なら

$$x_k-x_{k+1}=\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}>0.\ \ \therefore x_{k+1}<x_k.$$

3) $x>\alpha$ のとき，2)より $f(x)>0$ だから，

$$u'(x)=\frac{\{e^x+(x-1)e^x\}(e^x-1)-e^x\{(x-1)e^x+2\}}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x(e^x-x-2)}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x f(x)}{f'(x)^2}>0 .$$

また， $u(\alpha)=\alpha$ ゆえ， $u(x)=\alpha+\int_\alpha^x u'(t)dt>\alpha$．よって， $x_k>\alpha$ なら $x_{k+1}=u(x_k)>\alpha$．