授業コード：77386-001,73305-001	＜参照物＞ ノート：1冊．A4以下体裁不問． 教科書：1冊．何でもよし． 電　卓：1台．通信機能無し．	回収：解答用紙のみ

数値解析　　定期試験　　'16.07/28

１．$3n \times n$ 行列 A, B と n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ が与えられたとする．$n = 10^3$ とする．

1) $q = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{x}$ の効率的な計算法を示し，計算量を示せ．（10点）

2) $C = AB^{\mathrm{T}}A$ の計算法 $C = (AB^{\mathrm{T}})A$ と $C = A(B^{\mathrm{T}}A)$ の計算量を比較せよ．（10点）

２．n 次正則行列 A と n 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ が与えられている．

1) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解くLU分解法の計算法と計算量を示せ．（10点）

2) 方程式 $\begin{pmatrix} A & A \\ O & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}$ を解く効率的な計算法と計算量を示せ．（10点）

３．LU分解法における部分ピボット選択法の効果を述べよ．（10点）

４．方程式 $f(x) = \tan x - \cos x = 0$ を２分法で解く．解を $x = \alpha$ とする．初期区間を $[a_0, b_0]$ とし，区間列 $\{[a_k, b_k]\}_{k \geq 1}$ を２分法のアルゴリズムに従って作ってゆく．このとき，区間中点を $c_k = (a_k + b_k)/2$ とする．

1) 区間 $[0, \pi/4]$ が初期区間として適切であることを示せ．（10点）

2) $|c_k - \alpha| \leq 10^{-3}$ が保証できる整数 k で，最小のものを示せ．（10点）

５．方程式 $f(x) = \exp x - 2 = 0$ を考える．ここで，$\exp x = e^x$ である．解は $x = \alpha = \log 2$ である．

$x_0 \cong \alpha$ を初期値としてニュートン法で作られる近似解の列を $\{x_k\}_{k \geq 0}$ とする．初期値 x_0 が $\alpha < x_0$ を満たすとき，$\{x_k\}_{k \geq 0}$ は単調減少して α に収束することを示そう．

1) x_k から x_{k+1} を計算する反復式 $x_{k+1} = x_k + 2\exp(-x_k) - 1$ を導け．（10点）

2) $\alpha < x_k$ なら，$x_{k+1} < x_k$ となることを示せ．（10点）

3) $\alpha < x_k$ なら，$\alpha < x_{k+1}$ となることを示せ．（10点）

ヒント3)：$x > \alpha$ で $u(x) = x + 2e^{-x} - 1 - \log 2 > 0$ を示す．$u(\alpha) = 0$ と $u'(x) > 0$ $(x > \alpha)$ を使う．

2), 3)の命題と帰納法を用いて，$\alpha < x_0$ なら $\{x_k\}_{k \geq 0}$ は単調減少して α に収束することが分かる．

解答

1．1) $q=(A\boldsymbol{x})^T(A\boldsymbol{x})$ で計算($\boldsymbol{x}^T A^T=(A\boldsymbol{x})^T$)． $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{3n}$ $(3n\times n=3n^2\ \mathit{flops})$, $q=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}\,(3n\ \mathit{flops})$.

計 $3n^2+3n=3.003\times 10^6\ \mathit{flops}$.

2) ① $C=(AB^T)A:\ D=AB^T\ (3n\times n\times 3n=9n^3\ \mathit{flops}), C=DA\,(3n\times 3n\times n=9n^3\ \mathit{flops})$.

計 $9n^3+9n^3=18n^3=18\times 10^9\ \mathit{flops}$.

② $C=A(B^TA):\ D=B^TA\,(n\times 3n\times n=3n^3\ \mathit{flops}), C=AD\,(3n\times n\times n=3n^3\ \mathit{flops})$.

計 $3n^3+3n^3=6n^3=6\times 10^9\ \mathit{flops}$.

②は①の1/3の計算量であり，①より優れた計算法である．

2．1)　計算法：(1) LU分解： $A=P^{-1}LU$　$(\frac{1}{3}n^3+O(n^2)\ \mathit{flops})$.

(2) LU求解： $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$　$(n^2\ \mathit{flops})$ （(1)で計算した P,L,U を使う．）

の2ステップで方程式を解く．計算量は $\frac{1}{3}n^3+O(n^2)\ \mathit{flops}$ である．

2) 方程式をブロック成分ごとに書くと， $A\boldsymbol{x}_1+A\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{b}_1,\ A\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{b}_2$ ． $\therefore A\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2$.

(1) A をLU分解．　：$\frac{1}{3}n^3+O(n^2)\ \mathit{flops}$.

(2) $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2$ を計算．　：$0\ \mathit{flops}$.

(3) $\boldsymbol{x}_1=A^{-1}\boldsymbol{c}$ をLU求解で計算．　：$n^2\ \mathit{flops}$.

(4) $\boldsymbol{x}_2=A^{-1}\boldsymbol{b}_2$ をLU求解で計算．　：$n^2\ \mathit{flops}$.

で計算できる．計算量は $\frac{1}{3}n^3+O(n^2)\ \mathit{flops}$ ． A を一度LU分解して(3), (4)二度使う．

（別解）方程式をブロック成分ごとに書くと， $A\boldsymbol{x}_1+A\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{b}_1,\ A\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{b}_2$ ． $\therefore A(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{b}_1$.

(1) A をLU分解．　：$\frac{1}{3}n^3+O(n^2)\ \mathit{flops}$.

(2) $\boldsymbol{s}=A^{-1}\boldsymbol{b}_1$　$(\boldsymbol{s}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)$ をLU求解で計算．　：$n^2\ \mathit{flops}$.

(3) $\boldsymbol{x}_2=A^{-1}\boldsymbol{b}_2$ をLU求解で計算．　：$n^2\ \mathit{flops}$.

(4) $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{s}-\boldsymbol{x}_2$ を計算．　：$0\ \mathit{flops}$.

で計算できる．計算量は $\frac{1}{3}n^3+O(n^2)\ \mathit{flops}$.

3．(1) ピボットが0になることを防ぐ．(2) 丸め誤差の伝播を小さくする．

4．1) $f(0)=\underbrace{\tan 0}_{0}-\underbrace{\cos 0}_{1}<0, f(\pi/4)=\underbrace{\tan(\pi/4)}_{1}-\underbrace{\cos(\pi/4)}_{1/\sqrt{2}}>0. \therefore f(0)f(\pi/4)<0.$　ゆえに，適切．

2) $2^9=512<\dfrac{b_0-a_0}{\varepsilon}=\dfrac{\pi/4-0}{10^{-3}}=785.\cdots<1024=2^{10}$ より，

$$k=\left\lceil \log_2\frac{b_0-a_0}{\varepsilon}\right\rceil-1=\left\lceil \log_2\frac{\pi/4-0}{10^{-3}}\right\rceil-1=10-1=9.$$

5． 1) $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \dfrac{\exp x_k - 2}{\exp x_k} = x_k + 2\exp(-x_k) - 1$.

2) $x_k > \alpha = \log 2$ より， $e^{x_k} > e^{\alpha} = 2$ ゆえに，

$$x_k - x_{k+1} = x_k - (\underbrace{x_k + 2\mathrm{e}^{-x_k} - 1}_{x_{k+1}}) = 1 - 2e^{-x_k} = \frac{e^{x_k} - 2}{e^{x_k}} > 0. \ \therefore x_{k+1} < x_k .$$

3) $u(x) = x + 2e^{-x} - 1 - \underbrace{\log 2}_{\alpha}$ とおく． $u(x_k) = x_{k+1} - \alpha$ である．

$$u(\alpha) = \alpha + 2e^{-\log 2} - 1 - \alpha = 0,$$
$$u'(x) = 1 - 2e^{-x} > 0 \ \ (x > \alpha)$$

より， $x_k > \alpha$ なら，

$$x_{k+1} - \alpha = u(x_k) = u(x_k) - \underbrace{u(\alpha)}_{0} = \int_{\alpha}^{x_k} u'(x)dx > 0.$$

ゆえに， $x_{k+1} > \alpha$.