授業コード：73305-001	参照物：ノート，教科書，電卓	回収：解答用紙のみ

数値解析　　定期試験　　'15.07/23

１．$2n\times n$ 行列 A,B と n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ が与えられたとする．$n=10^3$ とする．

1) $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ の計算法 $\boldsymbol{z}=\left(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right)$ の計算量を比較せよ．（10点）

2) $q=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{x}$ の効率的な計算法を示し，計算量を述べよ．（10点）

２．n 次正則行列 A と n 次元列ベクトル $\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ が与えられている．

1) 方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を解くLU分解法の計算法と計算量を示せ．（10点）

2) 方程式 $\begin{pmatrix} A^2 & O \\ I & 2I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}$ を解く効率的な計算法と計算量を示せ．（10点）

３．線形方程式を解く逆行列法の欠点を述べよ．（10点）

４．方程式 $f(x)=\log x-\cos x=0$ を２分法で解く．解を $x=\alpha$ とする．初期区間を $[a_0,b_0]$ とし，区間列 $\{[a_k,b_k]\}_{k\ge1}$ を２分法のアルゴリズムに従って作ってゆく．このとき，区間中点を $c_k=(a_k+b_k)/2$ とする．

1) 区間 $[1,\pi/2]$ が初期区間として適切であることを示せ．（10点）

2) $|c_k-\alpha|\le 10^{-3}$ が保証できる整数 k で，最小のものを示せ．（10点）

５．方程式 $f(x)=x^2-\dfrac{a}{x}=0\ (a>0)$ の解は a の立方根 $\alpha=\sqrt[3]{a}$ である．$x_0\ (0<x_0<\alpha)$ を初期値としてニュートン法で作られる近似解の列を $\{x_k\}_{k\ge0}$，誤差を $e_k=x_k-\alpha$ とする．初期値 x_0 が $0<x_0<\alpha$ を満たすとき，$\{x_k\}_{k\ge0}$ は単調増加して α に収束することを示そう．

1) x_k から x_{k+1} を計算する反復式 $x_{k+1}=x_k+\delta_k,\ \delta_k=\dfrac{x_k(a-x_k^3)}{2x_k^3+a}$ を導け．（10点）

2) 関係式 $e_{k+1}=\left(\dfrac{x_k+\alpha}{2x_k^3+a}\right)e_k^3$ を示せ．（10点）

　ヒント：反復式の両辺から α を引き，$a=\alpha^3$ を代入．因数分解．

3) $0<x_k<\alpha$ なら，$x_k<x_{k+1}<\alpha$ となることを示せ．（10点）

　ヒント：1), 2)を用いて，$x_{k+1}-x_k=\delta_k,\alpha-x_{k+1}=-e_{k+1}$ の符号を調べる．

3)の命題と帰納法を用いて，$0<x_0<\alpha$ なら $\{x_k\}_{k\ge0}$ は単調増加して α に収束することが分かる．

解答

１．1) $\boldsymbol{z}=\left(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}$： $A=\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n\times n}(n^2\ \mathit{flops}), \boldsymbol{z}=A\boldsymbol{x}(n^2\ \mathit{flops})$． 計 $2n^2=2\times10^6\ \mathit{flops}$．

$z=\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right)$ ： $a=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}x\in\mathbb{R}\ (n\ \mathit{flops}), \boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}a\ (n\ \mathit{flops})$． 計 $2n=2\times10^3\ \mathit{flops}$．

以上より後者が効率的.

2) $q=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{y}=B\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{2n}(2n^2\ \mathit{flops}), \boldsymbol{z}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n(2n^2\ \mathit{flops}), q=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}(n\ \mathit{flops})$．

計 $4n^2+n\cong4\times10^6\ \mathit{flops}$．

２．1) 計算法：(1) LU分解： $A=P^{-1}LU$ $\quad(\frac{1}{3}n^3+O(n^2)\ \mathit{flops})$．

(2) LU求解： $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$ $\quad(n^2\ \mathit{flops})$

の2ステップで方程式を解く．計算量は $\frac{1}{3}n^3+O(n^2)\ \mathit{flops}$ である.

2) 方程式をブロック成分ごとに書くと， $A^2\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{x}_1+2\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{b}_2$． $\therefore\boldsymbol{x}_2=\dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{x}_1\right)$．

(1) A をLU分解. ： $\frac{1}{3}n^3+O(n^2)\ \mathit{flops}$．

(2) $\boldsymbol{u}=A^{-1}\boldsymbol{b}_1$ をLU求解で計算. ： $n^2\ \mathit{flops}$．

(3) $\boldsymbol{x}_1=A^{-1}\boldsymbol{u}$ をLU求解で計算. ： $n^2\ \mathit{flops}$．

(4) $\boldsymbol{b}_2'=\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{x}_1$ を計算. ： $0\ \mathit{flops}$．

(5) $\boldsymbol{x}_2=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}_2'$ をベクトル・スカラ積で計算. ： $n\ \mathit{flops}$．

で計算できる．計算量は $\frac{1}{3}n^3+O(n^2)\ \mathit{flops}$．

３．(1) 計算量がLU分解法の約３倍(遅い)．(2) メモリ使用量が多い(高い)．(3) 精度が悪い(まずい).

４．1) $f(1)=0-\cos1<0, f(\pi/2)=\log\dfrac{\pi}{2}-0>0.\therefore f(1)f(\pi/2)<0.$ ゆえに，適切.

2) $2^9=512<\dfrac{\pi/2-1}{10^{-3}}=5.7\cdots\times10^2<1024=2^{10}$ より，

$$k=\left\lceil\log_2\frac{b_0-a_0}{\varepsilon}\right\rceil-1=\left\lceil\log_2\frac{\pi/2-1}{10^{-3}}\right\rceil-1=10-1=9.$$

５．1) $\delta_k=-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}=-\dfrac{x_k^2-ax_k^{-1}}{2x_k+ax_k^{-2}}=\dfrac{x_k(a-x_k^3)}{2x_k^3+a}$．

2) $a=\alpha^3$ ゆえ，

$$e_{k+1}=x_{k+1}-\alpha=x_k+\frac{x_k(a-x_k^3)}{2x_k^3+a}-\alpha=\frac{x_k(2x_k^3+a)+\alpha^3x_k-x_k^3-\alpha(2x_k^3+\alpha^3)}{2x_k^3+a}=\frac{x_k^4-2\alpha x_k^3+2\alpha^3x_k-\alpha^4}{2x_k^3+a}$$

$$=\frac{x_k^4-\alpha^4-2\alpha x_k(x_k^2-\alpha^2)}{2x_k^3+a}=\frac{(x_k^2+\alpha^2-2\alpha x_k)(x_k^2-\alpha^2)}{2x_k^3+a}=\frac{(x_k+\alpha)(x_k-\alpha)^3}{2x_k^3+a}=\left(\frac{x_k+\alpha}{2x_k^3+a}\right)e_k^3.$$

3) $0 < x_k < \alpha$ より， $a - x_k^3 > 0$ ゆえ， $x_{k+1} - x_k = \delta_k = \dfrac{x_k(a - x_k^3)}{2x_k^3 + a} > 0$.

また， $x_k - \alpha < 0$ ゆえ， $x_{k+1} - \alpha = e_{k+1} = \left(\dfrac{x_k + \alpha}{2x_k^3 + a}\right) e_k^3 = \left(\dfrac{x_k + \alpha}{2x_k^3 + a}\right)(x_k - \alpha)^3 < 0$ である.

ゆえに， $x_k < x_{k+1} < \alpha$ である.