授業コード：72371-001，73305-001	参照物：ノート，教科書，電卓	回収：解答用紙のみ

数値解析　　定期試験　　'14.07/28

１．1000×1000 行列 A, B と 1000 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ が与えられたとする．

1）$\boldsymbol{y} = AB\boldsymbol{x}$ の計算法 $\boldsymbol{y} = (AB)\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y} = A(B\boldsymbol{x})$ の計算量を比較せよ．（10点）

2) A が対称行列のとき，$c = \boldsymbol{x}^T A^2 \boldsymbol{x}$ の効率的な計算法を示し，計算量を述べよ．（10点）

２．n 次正則行列 A と n 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ が与えられている．

1) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解くLU分解法の計算法と計算量を示せ．（10点）

2) 方程式 $\begin{pmatrix} A & O \\ I & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}$ を解く効率的な計算法と計算量を示せ．（10点）

３．LU分解法における部分ピボット選択の効果について述べよ．（10点）

４．方程式 $f(x) = e^{-x} - \sin x = 0$ を２分法で解く．解を $x = \alpha$ とする．初期区間を $[a_0, b_0]$ とし，区間列 $\{[a_k, b_k]\}_{k \ge 1}$ を２分法のアルゴリズムに従って作ってゆく．このとき，区間中点を $c_k = (a_k + b_k)/2$ とする．

1) 区間 $[0, \pi/2]$ が初期区間として適切であることを示せ．（10点）

2) $|c_k - \alpha| \le 10^{-3}$ が保証できる整数 k で，最小のものを示せ．（10点）

５．方程式 $f(x) = x - \dfrac{a}{x} = 0\ (a > 0)$ を解くと，解として a の平方根 $\alpha = \sqrt{a}$ が得られる．x_0 を初期値としてニュートン法で作られる近似列を $\{x_k\}_{k \ge 0}$，誤差を $e_k = x_k - \alpha$ とする．初期値 x_0 が $x_0 < \alpha$ を満たすとき，$x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \alpha$ であることが知られている．

1）x_k から x_{k+1} を計算する反復式 $x_{k+1} = \dfrac{2ax_k}{a + x_k^2}$ を導け．（10点）

2) 関係式 $e_{k+1} = -\left(\dfrac{\alpha}{a + x_k^2} \right) e_k^2\ \ (k \ge 0)$ を導け．（10点）

ヒント：反復式の両辺から α を引き，$a = \alpha^2$ を代入．因数分解．

3) $|e_{k+1}| < \dfrac{1}{\sqrt{a}} |e_k|^2$ であることを示せ．$\{x_k\}_{k \ge 0}$ の収束次数は何次か．（10点）

ヒント：$\left| \dfrac{\sqrt{a}}{a + x_k^2} \right| < \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ を示せばよい．

解答

１．1） $\boldsymbol{y}=(AB)\boldsymbol{x}$： $C=AB$ (1000^3 *flops*), $\boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x}$ (1000^2 *flops*).　　　計 1.001×10^9 *flops*.

$\boldsymbol{y}=A(B\boldsymbol{x})$ ： $\boldsymbol{z}=B\boldsymbol{x}$ (1000^2 *flops*), $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{z}$ (1000^2 *flops*).　　　計 0.002×10^9 *flops*.

以上より後者が効率的.

2) A は対象ゆえ $A^T=A$．よって， $c=\boldsymbol{x}^TA^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^TA^TA\boldsymbol{x}=(A\boldsymbol{x})^T(A\boldsymbol{x})$ である.

$c=(A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ (1000^2 *flops*), $c=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ (1000 *flops*).　　　計 1.001×10^6 *flops*.

２． 1） 計算法：(1) LU分解： $A=P^{-1}LU$　　$(\frac{1}{3}n^3+O(n^2)$ *flops*$)$.

(2) LU求解： $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$　　(n^2 *flops*)

の2ステップで方程式を解く．計算量は $\frac{1}{3}n^3+O(n^2)$ *flops* である.

2) 方程式をブロック成分ごとに書くと， $A\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{x}_1+A\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{b}_2$． $\therefore A\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{x}_1$.

(1) A をLU分解.　　　　　　　　： $\frac{1}{3}n^3+O(n^2)$ *flops*.

(2) $\boldsymbol{x}_1=A^{-1}\boldsymbol{b}_1$ をLU求解で計算.　： n^2 *flops*.

(3) $\boldsymbol{b}_2'=\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{x}_1$ を計算.　　　： 0 *flops*.

(4) $\boldsymbol{x}_2=A^{-1}\boldsymbol{b}_2'$ をLU求解で計算.　： n^2 *flops*.

で計算できる．計算量は $\frac{1}{3}n^3+O(n^2)$ *flops*.

３．(1) ピボット要素を非零とする．(2) 計算誤差の拡大を抑える.

４．1） $f(0)=1-0>0, f(\pi/2)=e^{-\pi/2}-1<1-1=0. \therefore f(0)f(\pi/2)<0.$　ゆえに，適切.

2) $2^{10}=1024<\dfrac{\pi/2}{10^{-3}}=1.5\cdots\times10^3<2048=2^{11}$ より，

$$k=\left\lceil \log_2\frac{b_0-a_0}{\varepsilon}\right\rceil-1=\left\lceil \log_2\frac{\pi/2}{10^{-3}}\right\rceil-1=11-1=10.$$

５．1） $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\dfrac{x_k-ax_k^{-1}}{1+ax_k^{-2}}=\dfrac{2ax_k^{-1}}{1+ax_k^{-2}}=\dfrac{2ax_k}{x_k^2+a}$.

2) $a=\alpha^2$ ゆえ，

$$e_{k+1}=x_{k+1}-\alpha=\frac{2ax_k}{x_k^2+a}-\alpha=\frac{2ax_k-\alpha x_k^2-\alpha a}{x_k^2+a}=-\frac{\alpha(x_k^2-2\alpha x_k+\alpha^2)}{x_k^2+a}=-\frac{\alpha(x_k-\alpha)^2}{x_k^2+a}=-\left(\frac{\alpha}{x_k^2+a}\right)e_k^2.$$

3) $x_k^2+a>a$ より，

$$|e_{k+1}|=\left|-\left(\frac{\alpha}{x_k^2+a}\right)e_k^2\right|=\left|\frac{\alpha}{x_k^2+a}\right||e_k|^2<\frac{\alpha}{a}|e_k|^2=\frac{1}{\sqrt{a}}|e_k|^2.$$

これより，収束次数は2.