数値解析第８回 線形変換の誤差解析2

1．条件数(condition number)

条件数は正則な正方行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ について定義される相対誤差の拡大率の指標.

△ **条件数：** $\mathrm{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. //

☆1 正則行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ と任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ について，$\|A\boldsymbol{x}\| \ge \|A^{-1}\|^{-1} \|\boldsymbol{x}\|$. //

［**定理1**］(相対誤差の拡大率)正則線形変換 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の近似入力を $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$，近似出力を $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{x}'$ とする．入力誤差は $\Delta\boldsymbol{x}$，出力誤差は $\Delta\boldsymbol{y} = A\Delta\boldsymbol{x}$ である．このとき,

$$\frac{\|\Delta\boldsymbol{y}\|}{\|\boldsymbol{y}\|} \le \mathrm{cond}(A) \frac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \tag{1}$$

が成立する．この不等式で，等号の成立する $\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{x}$ が存在する．//

（証明）ノルムの性質より $\|A\Delta\boldsymbol{x}\| \le \|A\| \cdot \|\Delta\boldsymbol{x}\|$，☆1より $\|A\boldsymbol{x}\| \ge \|A^{-1}\|^{-1} \|\boldsymbol{x}\|$ だから,

$$\frac{\|\Delta\boldsymbol{y}\|}{\|\boldsymbol{y}\|} = \frac{\|A\Delta\boldsymbol{x}\|}{\|A\boldsymbol{x}\|} \le \frac{\|A\| \cdot \|\Delta\boldsymbol{x}\|}{\|A^{-1}\|^{-1} \|\boldsymbol{x}\|} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \mathrm{cond}(A) \frac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}.$$

不等式が示された．$\|A\Delta\boldsymbol{x}\| = \|A\| \cdot \|\Delta\boldsymbol{x}\|$ の成立する $\Delta\boldsymbol{x}$ (拡大率最大のベクトル)，$\|A\boldsymbol{x}\| = \|A^{-1}\|^{-1} \|\boldsymbol{x}\|$ の成立する $\boldsymbol{x}$ (拡大率最小のベクトル)は存在する．これらについて，等号が成立する．//

◎ 条件数は使用するノルムに依存するので，下添え字で区別する．すなわち,

$$\mathrm{cond}_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1, \quad \mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2, \quad \mathrm{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty.$$

また，不等式(1)についても,

$$\frac{\|\Delta\boldsymbol{y}\|_1}{\|\boldsymbol{y}\|_1} \le \mathrm{cond}_1(A) \frac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1}, \quad \frac{\|\Delta\boldsymbol{y}\|_2}{\|\boldsymbol{y}\|_2} \le \mathrm{cond}_2(A) \frac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}, \quad \frac{\|\Delta\boldsymbol{y}\|_\infty}{\|\boldsymbol{y}\|_\infty} \le \mathrm{cond}_\infty(A) \frac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}. \ //$$

［**例1**］ $\mathrm{cond}_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = 10^5$, $\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1} \le 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\|\Delta\boldsymbol{y}\|_1}{\|\boldsymbol{y}\|_1} \le \mathrm{cond}_1(A) \dfrac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1} \le 10^5 10^{-6} = 10^{-1}$.

条件数が大きいと，出力相対誤差が大きくなる可能性がある．危険！//

２．相対誤差伝播の解析例

［**例2**］ $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$，$A=\begin{pmatrix} 1000 & -999 \\ -999 & 1000 \end{pmatrix}$ で，$\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}\le 10^{-3}$ のとき，出力相対誤差 $\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{y}\|_\infty}{\|\boldsymbol{y}\|_\infty}$ を評価する．

$\|A\|_\infty=\max\begin{Bmatrix} 1000+999 \\ 999+1000 \end{Bmatrix}=1999$．また，$A^{-1}=\dfrac{1}{1999}\begin{pmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 1000 \end{pmatrix}$ ゆえ，

$\|A^{-1}\|_\infty=\dfrac{1}{1999}\max\begin{Bmatrix} 1000+999 \\ 999+1000 \end{Bmatrix}=1$．よって，$\mathrm{cond}_\infty(A)=\|A\|_\infty\cdot\|A^{-1}\|_\infty=1999\cdot 1=1999$．以上より，

$$\frac{\|\Delta\boldsymbol{y}\|_\infty}{\|\boldsymbol{y}\|_\infty}\le \mathrm{cond}_\infty(A)\frac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}\le 1999\cdot 10^{-3}=1.999\,. \qquad \cdots ①$$

例えば，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\Delta\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 10^{-3} \\ -10^{-3} \end{pmatrix}$ とすると $\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}=10^{-3}$．また，$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\Delta\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} 1.999 \\ -1.999 \end{pmatrix}$ ゆえ，

$\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{y}\|_\infty}{\|\boldsymbol{y}\|_\infty}=1.999$．すなわち①で等号が成立する．それにしてもひどい誤差！//

［**例3**］例2のシステムで $\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}\le\varepsilon \Rightarrow \dfrac{\|\Delta\boldsymbol{y}\|_\infty}{\|\boldsymbol{y}\|_\infty}\le 10^{-3}$ が保証できるように，正数 $\varepsilon>0$ を定める．

$$\frac{\|\Delta\boldsymbol{y}\|_\infty}{\|\boldsymbol{y}\|_\infty}\le \mathrm{cond}_\infty(A)\frac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}\le 1999\varepsilon\le 10^{-3}$$

より，$\varepsilon\le\dfrac{10^{-3}}{1999}=5.0\cdots\times 10^{-7}$．右辺を切り捨てて，$\varepsilon=5\times 10^{-7}$ とする（切り上げ不可）．//

３．条件数の性質

［**定理2**］(任意の従属ノルムについて)

(1) $\mathrm{cond}(I)=1$，(2) $\mathrm{cond}(A^{-1})=\mathrm{cond}(A)$，(3) $\mathrm{cond}(A)\ge 1$．//

［**定理3**］(2-ノルムについて) 直交行列 A と非零実数 $\alpha\ne 0$ について，$\mathrm{cond}_2(\alpha A)=1$．//

練習問題

線形変換 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}, A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ を考える．$A^{-1}=\begin{pmatrix} 40 & 300 & 280 \\ 120 & 1080 & 1050 \\ 84 & 840 & 840 \end{pmatrix}$ である．

1) ノルム $\|A\|_\infty, \|A^{-1}\|_\infty$ を求めよ．

2) 条件数 $\mathrm{cond}_\infty(A)$ を求めよ．

3) 入力相対誤差 $\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}\le 10^{-6}$ とする．このとき，出力相対誤差 $\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{y}\|_\infty}{\|\boldsymbol{y}\|_\infty}\le 2.5\times 10^{-3}$ が常に成立するかどうか検証せよ．