数値解析第７回 線形変換の誤差解析1

1．ベクトルのノルム　ベクトルの大きさ(長さ)の指標

ベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$ について，

1) **1-ノルム**：$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

2) **2-ノルム**：$\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$

3) **∞-ノルム**：$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$

○ **ベクトルノルムの公理**(ノルムの性質)

任意のベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ とスカラー $\alpha\in\mathbb{R}$ について，

(1) $\|\boldsymbol{x}\|\ge 0$．かつ $\|\boldsymbol{x}\|=0\Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

(2) $\|\alpha\boldsymbol{x}\|=|\alpha|\cdot\|\boldsymbol{x}\|$，

(3) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\le\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ (三角不等式).

［例1］ $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_k\in\mathbb{R}^n,\ \alpha_1,\cdots,\alpha_k\in\mathbb{R},\ \boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{x}_i$ について，$\|\boldsymbol{y}\|\le\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i|\cdot\|\boldsymbol{x}_i\|$.

$$\because\|\boldsymbol{y}\|=\left\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{x}_i\right\|\overset{(2)}{\le}\sum_{i=1}^{k}\|\alpha_i\boldsymbol{x}_i\|\overset{(1)}{\le}\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i|\cdot\|\boldsymbol{x}_i\|.\ //$$

△ **近似ベクトルと誤差**

ベクトル $\boldsymbol{x}$，近似ベクトル $\boldsymbol{x}'\cong\boldsymbol{x}$ に対し，

誤差：$\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}$，　**絶対誤差**：$\|\Delta\boldsymbol{x}\|$，　**相対誤差**：$\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$.

2．行列のノルム　行列の大きさ(強さ)の指標

行列 $A=(a_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ の大きさについて考える.

△ A による $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n-\{\boldsymbol{0}\}$ の**拡大率**：$\mu(\boldsymbol{x})=\dfrac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$.

△ **従属ノルム**：$\|A\|=\max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n-\{\boldsymbol{0}\}}\dfrac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}=\max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n-\{\boldsymbol{0}\}}\mu(\boldsymbol{x})$．//　最大拡大率！

○ **行列ノルムの公理**

該当する演算に整合する任意の行列 A,B と，スカラー $\alpha\in\mathbb{R}$ について，

(1) $\|A\|\ge 0$．かつ $\|A\|=0\Leftrightarrow A=O$，

(2) $\|\alpha A\|=|\alpha|\cdot\|A\|$，

(3) $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$ (三角不等式).

(4) $\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|$

［**例2**］ $\|A(\alpha B+C)\|\overset{(4)}{\le}\|A\|\cdot\|\alpha B+C\|\overset{(3)}{\le}\|A\|\left(\|\alpha B\|+\|C\|\right)\overset{(2)}{=}\|A\|\left(|\alpha|\cdot\|B\|+\|C\|\right)$．//

☆1 従属ノルムは行列ノルムである．//

［**定理1**］ $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ のとき $\|A\boldsymbol{x}\| \le \|A\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|$．//

（証明） $\boldsymbol{x}$ を $n\times 1$ 行列と見なし，行列ノルムの公理の(4)を用いる．//

○ 具体的な従属ノルムの計算法

1) **1-ノルム**：$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$．

2) **2-ノルム**：$\|A\|_2 = \sqrt{\sigma\left(A^T A\right)} = \sqrt{\sigma\left(AA^T\right)}$． ここで， σ はスペクトル半径(定義はすぐ下).

3) **∞-ノルム**：$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$．

△ 正方行列 $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の**スペクトル半径**：$\sigma(B) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|$． $\lambda_i\ (1 \le i \le n)$ は B の固有値．//

3．線形変換による絶対誤差の伝播

行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ が定義する線形変換 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ を考える．入力 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ の近似を $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$ とすると，出力 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$， 近似出力 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{x}' = A(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + A\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + A\Delta\boldsymbol{x}$，

☆2 出力誤差： $\Delta\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}' - \boldsymbol{y} = A\Delta\boldsymbol{x}$．//

☆3 出力絶対誤差評価：$\|\Delta\boldsymbol{y}\| \le \|A\|\cdot\|\Delta\boldsymbol{x}\|$．最悪の場合，等号が成立．//

＜ $\|A\|$ は絶対誤差の拡大率＞

［**例3**］ $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ について， $\|\Delta\boldsymbol{x}\|_1 \le 10^{-3}$ のとき， $\Delta\boldsymbol{y} = A\Delta\boldsymbol{x}$ のノルム $\|\Delta\boldsymbol{y}\|_1$ を評価する．

$\|A\|_1 = \max\left\{ \begin{matrix} 1 \\ + \\ 2 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ + \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 2 \\ + \\ 1 \end{matrix} \right\} = 3$ より， $\|\Delta\boldsymbol{y}\|_1 = \|A\Delta\boldsymbol{x}\|_1 \le \|A\|_1 \|\Delta\boldsymbol{x}\|_1 \le 3\times 10^{-3}$．//

練習問題

(1) $\boldsymbol{x} = (1,2,-3)^T$ について， $\|\boldsymbol{x}\|_1, \|\boldsymbol{x}\|_2, \|\boldsymbol{x}\|_\infty$ を求めよ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ について， $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$ を求めよ．

(3) (2)の A について， $\|\Delta\boldsymbol{x}\|_\infty \le 10^{-3}$ のとき， $\Delta\boldsymbol{y} = A\Delta\boldsymbol{x}$ のノルム $\|\Delta\boldsymbol{y}\|_\infty$ を評価せよ．