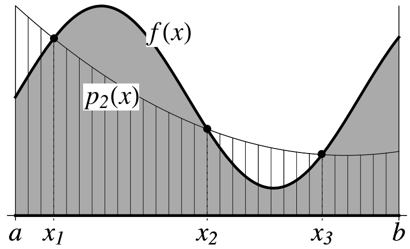
数値解析第6回 数値積分



1．補間型積分則　補間法に基づく近似積分則

・定積分：$I^{(a,b)}f=\int_a^b f(x)dx$

・n 点補間：$f(x)\cong p_{n-1}(x)=\sum_{l=1}^{n}\varphi_l(x)f(x_l)$, $\varphi_l(x)=\prod_{i=1,\,i\neq l}^{n}\frac{x-x_i}{x_l-x_i}$

・近似積分：$Q_n^{(a,b)}f=\int_a^b p_{n-1}(x)dx\cong\int_a^b f(x)dx$

☆1 $Q_n^{(a,b)}f=\sum_{l=1}^{n}w_l f(x_l)$．重み $w_l=\int_a^b\varphi_l(x)dx$ $(1\le l\le n)$ はあらかじめ計算しておく．

2．実用的構成法（内分比：$t_1,\cdots,t_n$，重み：$\rho_1,\cdots,\rho_n$ をデータとする）

・内分比 $t_l\in[0,1]$ $(1\le l\le n)$ を定め，重み $\rho_l=\int_0^1\prod_{i=1,\,i\neq l}^{n}\frac{t-t_i}{t_l-t_i}dt$ をあらかじめ計算しておく．

☆2 任意区間 $[a,b]$ の分点は $x_l=a+ht_l$ $(1\le l\le n)$ とすれば，区間幅を $h=b-a$ として，

$$Q_n^{(a,b)}f=h\sum_{l=1}^{n}\rho_l f(a+ht_l)\ .\ // \tag{1}$$

3．積分則の次数と積分誤差

△ 積分則 $Q_n^{(a,b)}$ が k 次 ⇔ 全ての k 次式を正確に積分．$k+1$ 次式は正確に積分できない．//

☆3 $Q_n^{(a,b)}$ は $n-1$ 次以上．

☆4 任意の $c\in\mathbb{R}$ について，$Q_n^{(0,1)}(x-c)^l=\int_0^1(x-c)^l\,dx$ $(0\le l\le k)$ なら $Q_n^{(a,b)}$ は k 次以上．//

［**定理1**］**(積分誤差)** 式(1)の積分則 $Q_n^{(a,b)}$ が k 次ならその誤差は，

$$\begin{aligned}\left|Q_n^{(a,b)}f-\int_a^b f(x)dx\right|&\le Mh^{k+2}f^{(a,b)}=O(h^{k+2}),\\ M=\frac{1}{2^{k+1}(k+1)!}&\left\{\frac{1}{k+2}+\sum_{l=1}^{n}|\rho_l|\right\},\ f^{(a,b)}=\max_{a\le x\le b}\left|f^{(k+1)}(x)\right|.//\end{aligned}\tag{2}$$

4．中点則，台形則，シンプソン則

・区間 $[a,b]$ の区間幅を $h=b-a$，中点を $c=(a+b)/2$ とする．$I=\int_a^b f(x)dx$ とする．

△ **中点則**(1点1次則)：$Q_1^{(a,b)}f=hf(c)=I+O(h^3)$

△ **台形則**(2点1次則)：$Q_2^{(a,b)}f=\frac{h}{2}(f(a)+f(b))=I+O(h^3)$

△ **シンプソン則**(3点3次則)：$Q_3^{(a,b)}f=\frac{h}{6}(f(a)+4f(c)+f(b))=I+O(h^5)$

☆5 $Q_3^{(a,b)}f=\frac{2}{3}Q_1^{(a,b)}f+\frac{1}{3}Q_2^{(a,b)}f$（シンプソン則は中点則と台形則を $1:2$ に内分する)．

5．複合則　積分区間を細分し，各区間に補間型積分則を適用

△ 複合則：区間の m 等分点．$a_i = a + ih, h = (b-a)/m$ として，

$$I_m f \equiv \sum_{i=1}^{m} Q_n^{(a_{i-1},a_i)} f \cong \sum_{i=1}^{m} \left(\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx \right) = \int_a^b f(x)dx\,.$$

［**定理2**］**(複合則の誤差)** k 次積分則 $Q_n^{(a,b)}$ による m 分割複合則 I_m について，

$$I_m f = \int_a^b f(x)dx + O(m^{-k-1})\,. \quad // \tag{2}$$

◎ 具体例

△ **中点則：** $M_m f = h\sum_{i=1}^{m} f(c_i) = \int_a^b f(x)dx + O(m^{-2})$．$c_i = a + (i - \frac{1}{2})h$ は小区間 $[a_{i-1}, a_i]$ の中点．

△ **台形則：** $T_m f = h\left(\dfrac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} f(a_i) \right) = \int_a^b f(x)dx + O(m^{-2})$．

△ **シンプソン則：** $S_{2m} f = \dfrac{2}{3} M_m f + \dfrac{1}{3} T_m f = \int_a^b f(x)dx + O(m^{-4})$．

［例１］ $M_m f = \dfrac{\pi}{m}\sum_{i=1}^{m} \sin\left(1 + \dfrac{\pi}{m}(i - \frac{1}{2})\right) = \int_1^{\pi+1} \sin x\,dx + O(m^{-2})$ $\quad f(x) = \sin x, a = 1, b = 1+\pi, h = \dfrac{\pi}{m}$.

［例２］ $I = \int_0^1 x^2\,dx = \dfrac{1}{3}$ を中点則で近似し，誤差項が $O(m^{-2})$ であることを示す．

$f(x) = x^2, [a,b] = [0,1], h = (b-a)/m = 1/m, c_i = a + (i-\frac{1}{2})h = (i - \frac{1}{2})/m$ だから，

$$\begin{aligned} M_m f &= h\sum_{i=1}^{m} f(c_i) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{i - 1/2}{m} \right)^2 = \frac{1}{m^3}\sum_{i=1}^{m} \left(i^2 - i + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{m^3}\left(\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} - \frac{m(m+1)}{2} + \frac{m}{4} \right) = \frac{1}{12m^2}\left(2(m+1)(2m+1) - 6(m+1) + 3 \right) \\ &= \frac{1}{12m^2}\left(4m^2 - 1 \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12m^2} = I + O(m^{-2}). \end{aligned}$$

これにより，誤差項は $O(m^{-2})$ である．//

練習問題

(1) 例1に習って，$I = \int_1^2 \log x\,dx$ の中点則による近似式を書け．

(2) 例2に習って，$I = \int_0^1 x^2\,dx = \dfrac{1}{3}$ を台形則で近似し，誤差項が $O(m^{-2})$ であることを示せ．