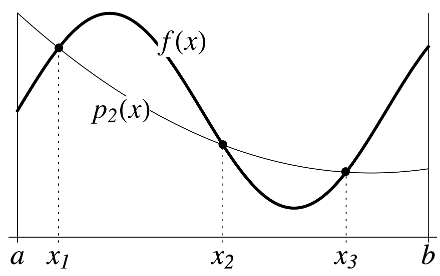
数値解析第５回 関数近似 補間法

1．補間法　近似多項式の一構成法

・被近似関数： $f(x)$ $(x \in [a,b])$

・分点(n 個)： $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b]$

・標本値： $y_l = f(x_l)$ $(1 \le l \le n)$



△ $n-1$ 次**補間多項式**： $n-1$ 次多項式

$$p_{n-1}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

で，**補間条件**： $p_{n-1}(x_l) = y_l = f(x_l)$ $(1 \le l \le n)$ を満たすもの.

$\Leftrightarrow$　n点 (x_l, y_l) $(1 \le l \le n)$ を通る $n-1$ 次式 $p_{n-1}(x)$．//

○ テイラー展開法対補間法
　① 高次微係数が必要　　　$\Leftrightarrow$　関数値のみでよい
　② 展開の中心で特に高精度　$\Leftrightarrow$　区間全域で均一な精度にできる(チェビシェフ補間)

２．ラグランジュ補間　補間多項式の存在とその表現

［**定理1**］(**ラグランジュ補間**) n 点 (x_l, y_l) $(1 \le l \le n)$ を通る $n-1$ 次式 $p_{n-1}(x)$ は

$$p_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \varphi_k(x), \quad \varphi_k(x) = \prod_{i=1,\, i \ne k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad (1 \le k \le n) \tag{1}$$

である．ここで， $n-1$ 次式 $\varphi_k(x)$ はラグランジュ補間の**基本多項式**と呼ばれる．//

（証明）① $\varphi_l(x_l) = \prod_{i=1,\, i \ne l}^{n} \frac{x_l - x_i}{x_l - x_i} = 1$．また，② $k \ne l$ なら， $\varphi_k(x) = \prod_{i=1,\, i \ne k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$ は因子 $x - x_l$ を持つので，

$\varphi_k(x_l) = 0$．以上より，

$$p_{n-1}(x_l) = \sum_{k=1}^{n} y_k \varphi_k(x_l) \overset{②}{=} y_l \varphi_l(x_l) \overset{①}{=} y_l .$$

すなわち， $p_{n-1}(x)$ は補間条件を満たす．//

３．補間誤差

［**定理2**］(**誤差**) $x \in [a,b]$ に対し， $\xi \in [a,b]$ が存在し， $n-1$ 次補間 $p_{n-1}(x)$ の誤差は，

$$f(x) - p_{n-1}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \omega_n(x), \quad \omega_n(x) = \prod_{l=1}^{n} (x - x_l) . \quad // \tag{2}$$

［**定理3**］(**補間の一意性**) 補間多項式はただ一つ．//

（証明）2つの $n-1$ 次補間を $p_{n-1}(x), q_{n-1}(x)$ とすると， $q_{n-1}(x_l) = y_l = p_{n-1}(x_l)$ $(1 \le l \le n)$ より， $q_{n-1}(x)$ は $p_{n-1}(x)$ の補間多項式．また $p_{n-1}(x)$ は $n-1$ 次ゆえ， $p_{n-1}^{(n)}(x) \equiv 0$．よって，定理2より，

$$p_{n-1}(x) - q_{n-1}(x) = p_{n-1}^{(n)}(\xi) \omega_n(x) \equiv 0 . \quad //$$

［定理4］(絶対誤差) $x \in [a,b]$ に対し，

$$\left|f(x)-p_{n-1}(x)\right| \le \frac{1}{n!}\left\{\max_{a\le\xi\le b}\left|f^{(n)}(\xi)\right|\right\}\left\{\max_{a\le\xi\le b}\left|\omega_n(\xi)\right|\right\}. \quad // \tag{3}$$

4．チェビシェフ補間　最良補間

・補間法の誤差指標： $W(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\max_{a\le\xi\le b}\left|\omega_n(\xi)\right|=\max_{a\le\xi\le b}\left|\prod_{l=1}^{n}(\xi-x_l)\right|$

［定理5］(最良補間) $W(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ を最小にする分点は，

$$x_l = c + r\cos\frac{\pi}{n}\left(l-\tfrac{1}{2}\right)\ (1\le l\le n),\ c=\frac{a+b}{2},\ r=\frac{b-a}{2}. \quad // \tag{4}$$

△ **チェビシェフ補間**：式(4)で定義された分点による補間法．

［定理6］(チェビシェフ補間の絶対誤差) 区間 $[a,b]$ における $f(x)$ の $n-1$ 次チェビシェフ補間 $p_{n-1}(x)$ の絶対誤差は，次のように評価される．

$$\left|p_{n-1}(x)-f(x)\right| \le \frac{2(b-a)^n}{4^n n!}\max_{a\le\xi\le b}\left|f^{(n)}(\xi)\right| \quad (x\in[a,b]). \quad // \tag{5}$$

［例1］ $[a,b]=\left[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right]$ における $f(x)=e^x$ の7次チェビシェフ補間 $p_7(x)$ の誤差．式(5)で $n=7+1=8$ とする．区間幅 $b-a=1$ ゆえ，絶対誤差は，

$$\left|p_7(x)-f(x)\right| \le \frac{2\cdot 1^8}{4^8 8!}\max_{-\frac{1}{2}\le\xi\le\frac{1}{2}}\left|e^{\xi}\right| = \frac{1}{2^{15}8!}e^{1/2} = 1.24\cdots\times10^{-9} < 1.3\times10^{-9}.$$

相対誤差は， $\left[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right]$ で $e^x \ge e^{1/2}$ だから，

$$\frac{\left|p_7(x)-f(x)\right|}{\left|f(x)\right|} \le \frac{1}{e^{-1/2}}\frac{1}{2^{15}8!}e^{1/2} = \frac{1}{2^{15}8!}e = 2.05\cdots\times10^{-9} < 2.1\times10^{-9}. \quad //$$

同じ次数(7次)のテーラー多項式のチェビシェフ補間の相対誤差のグラフが，教科書p.14とp.17にある．テーラー多項式の相対誤差は，展開の中心(原点)できわめて小さい．チェビシェフ補間の相対誤差は区間全域で平均化されている．誤差の最大値をくらべると，チェビシェフ補間はテーラー多項式の約1/150である．

練習問題

例1に習って，次のチェビシェフ補間の絶対誤差を評価せよ．近似範囲は $|x|\le\dfrac{1}{2}$，すなわち，$[a,b]=\left[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right]$ とする．前回のテーラー多項式の結果と比べてみよ．

(1) $p_3(x)\cong f(x)=\log(1+x)\quad(n=4)$　　(2) $p_6(x)\cong f(x)=\sin x\quad(n=7)$