数値解析第４回 関数近似 テイラー展開法

・四則演算で計算できる値は，入力変数の有理式である．
・Difference Engine(歯車式多項式計算機，Babbage 1822)
・Analytical Engine(蒸気動力歯車式汎用計算機，パンチカード入力，Babbage 1842)
・「任意の連続関数は多項式により任意の精度で近似できる」(Weierstrass, 1885)

1．多項式の計算

◎ ネスティング法

・ n 次多項式： $y=p_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

・入力：係数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ と x の値

・出力： $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

・アルゴリズム： $\begin{cases} y_0=a_0, \\ y_k=y_{k-1}x+a_k \ \ (k=1,2,\cdots,n). \end{cases}$

$y=y_n$ である．//

（ $y=y_n$ の証明）帰納法で $y_k=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k\ (0\le k\le n)$ を示す． $k=0$ のとき， $y_0=a_0=a_0x^0$ ゆえ，成立．ある $k\ge 0$ で $y_k=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k$ なら，

$$y_{k+1}=y_kx+a_{k+1}=\underbrace{(a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k)}_{y_k}x+a_{k+1}$$
$$=a_0x^{k+1}+a_1x^k+\cdots+a_{k-1}x^2+a_kx+a_{k+1}$$

も成立．ゆえに，任意の k で成立する．特に， $y_n=a_0x^n+a_1x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n=y$ ．//

［例1］ $n=3$ のとき， $y=y_3=\underbrace{(\underbrace{(\underbrace{(\underbrace{a_0}_{y_0=a_0}x+a_1)}_{y_1=y_0x+a_1}x+a_2)}_{y_2=y_1x+a_2}x+a_3}_{y_3=y_2x+a_3}$

・Cプログラム：`a[k] =` a_k $(k=0,1,\cdots,n)$，`x =` x として，

```
y = a[0];
for(k=1;k<=n;k++) y = y*x + a[k];
```

☆ 計算量は乗算 n 回，加算 n 回．

◎ ダメな計算法(**使用禁止**)：各項を乗算で求め，総和を取る．

$$y=p_n(x)=\underbrace{a_0x^n}_{n\text{乗算}}+\underbrace{a_1x^{n-1}}_{n-1\text{乗算}}+\cdots+\underbrace{a_{n-1}x}_{1\text{乗算}}+a_n$$

計算量は乗算 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 回，加算 n 回．

2．テイラー展開法　(近似多項式を作る方法)

△ テイラー級数(展開の中心 a)： $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$，　$c_k=\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ $(k \ge 0)$

△ テイラー多項式： $p_{n-1}(x)=\sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k \cong f(x)$．　$f(x)$ を近似.

☆1 **誤差評価1**：$|x-a| \le r$ で，テイラー級数が絶対収束するなら，

$$\left|p_{n-1}(x)-f(x)\right| \le \sum_{k=n}^{\infty} |c_k| r^k \ .//$$

＜ r が小さいほど，また， n が大きいほど，誤差は小さくなる傾向がある．＞

☆2 **誤差評価2**(ラグランジュの公式)： $f(x)$ が n 回微分可能なら， a と x の内分点 ξ が在って，

$$f(x)-p_{n-1}(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n \ . \ //$$

☆3 **絶対誤差評価**：$|x-a| \le r$ で， $f(x)$ が n 回微分可能なら，

$$\left|p_{n-1}(x)-f(x)\right| \le \frac{r^n}{n!} \max_{|\xi-a| \le r} \left|f^{(n)}(\xi)\right| . \ //$$

［例2］ $f(x)=e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$，　$p_7(x)=\sum_{k=0}^{7}\dfrac{x^k}{k!}=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^7}{7!} \cong e^x$.

$a=0, n=7+1=8$ である． $r=\dfrac{1}{2}$ とする． $f^{(n)}(\xi)=e^{\xi}, \max_{|\xi| \le 1/2} e^{\xi}=e^{1/2}$ であるから，

・絶対誤差：$\left|p_{n-1}(x)-f(x)\right| \le \dfrac{r^n}{n!}\max_{|\xi| \le r}\left|f^{(n)}(\xi)\right|=\dfrac{e^{1/2}}{8!2^8}=1.57\cdots \times 10^{-7} < 1.6 \times 10^{-7}$.

・相対誤差：$\dfrac{\left|p_{n-1}(x)-e^x\right|}{\left|e^x\right|} \le \dfrac{e^{1/2}}{8!2^8 e^x} \le \dfrac{e^{1/2}}{8!2^8 e^{-1/2}}=\dfrac{e}{8!2^8}=2.63\cdots \times 10^{-7} < 2.7 \times 10^{-7}$.

練習問題

例2に習って，次の近似式の絶対誤差を評価せよ．近似範囲は $|x| \le \dfrac{1}{2}$ とする．

(1) $p_3(x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3} \cong f(x)=\log(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$

(2) $p_6(x)=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120} \cong f(x)=\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$