数値解析第２回 関数の誤差伝播

計算を入力 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ から出力 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ を得る関数と見なす.

1．誤差解析(1変数)

入力： x → 出力： $y=f(x)$

近似入力： x' → 近似出力： $y'=f(x')$

入力誤差： $\Delta x=x'-x$ → **出力誤差：** $\Delta y=y'-y$

☆(平均値の定理) $\Delta y=f(x')-f(x)=f'(c)(x'-x)=f'(c)\Delta x$． c は x',x の内分点．//

出力誤差概算公式(1変数)

$$\Delta y\cong E=f'(x)\Delta x \text{ または } \Delta y\cong E=f'(x')\Delta x$$

［例1］ $f(x)=e^x$ とする． $\Delta y\cong f'(x)\Delta x=e^x\Delta x$． 出力誤差は入力誤差の e^x 倍.

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right|\cong\left|\frac{f'(x)\Delta x}{f(x)}\right|=\left|\frac{e^x\Delta x}{e^x}\right|=|\Delta x|=|x|\left|\frac{\Delta x}{x}\right|.$$

出力相対誤差は入力相対誤差の $|x|$ 倍．//

2．誤差解析(n 変数)

入力： $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ → 出力： $y=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

近似入力： $\boldsymbol{x}'=(x_1',x_2',\cdots,x_n')$ → 近似出力： $y'=f(\boldsymbol{x}')=f(x_1',x_2',\cdots,x_n')$

・**入力誤差：** $\Delta x_i=x_i'-x_i\ (1\le i\le n)$ → **出力誤差：** $\Delta y=y'-y$

☆(テイラーの定理) $\Delta y=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{c})}{\partial x_i}\Delta x_i$． $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}$ の内分点．//

出力誤差概算公式(n 変数)

$$\Delta y\cong E=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\Delta x_i \text{ または } \Delta y\cong E=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x}')}{\partial x_i}\Delta x_i$$

［例2］点 $\boldsymbol{x}=(x,y)$ と原点との距離 $r=r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ を求める計算を考える．近似入力 x',y'，入力誤差 $\Delta x=x'-x,\Delta y=y'-y$，出力誤差 $\Delta r=r(x',y')-r(x,y)$ を見積もる.

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r},\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{r}$$

より,

$$\Delta r=r(x',y')-r(x,y)\cong E=\frac{\partial r}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial r}{\partial y}\Delta y=\frac{x}{r}\Delta x+\frac{y}{r}\Delta y.$$

これより，出力相対誤差は

$$\left|\frac{\Delta r}{r}\right| \cong \left|\frac{E}{r}\right| = \left|\frac{x}{r^2}\Delta x + \frac{y}{r^2}\Delta y\right| \le \left|\frac{x}{r^2}\right||\Delta x| + \left|\frac{y}{r^2}\right||\Delta y| = \left|\frac{x^2}{r^2}\right|\left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{y^2}{r^2}\right|\left|\frac{\Delta y}{y}\right|$$
$$\le \left(\left|\frac{x^2}{r^2}\right| + \left|\frac{y^2}{r^2}\right|\right)\max\left\{\left|\frac{\Delta x}{x}\right|, \left|\frac{\Delta y}{y}\right|\right\} = \max\left\{\left|\frac{\Delta x}{x}\right|, \left|\frac{\Delta y}{y}\right|\right\}.$$

よって，出力相対誤差の入力相対誤差による見積もり，

$$\left|\frac{\Delta r}{r}\right| \cong \left|\frac{E}{r}\right| \le \max\left\{\left|\frac{\Delta x}{x}\right|, \left|\frac{\Delta y}{y}\right|\right\}$$

が得られる．近似入力 x', y' が有効桁数3桁なら， r' も有効桁数3桁である．//

［例3］ 2辺 $a[\mathrm{m}], b[\mathrm{m}]$，挟角 $\theta[°]$ の三角形の面積 $S = S(a,b,\theta) = \frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi\theta}{180}[\mathrm{m}^2]$．各量の測定結果が $a = (4.00 \pm 10^{-3})\mathrm{m}, b = (3.00 \pm 10^{-3})\mathrm{m}, \theta = (30.0 \pm 10^{-1})°$ のとき，面積の範囲は？

与えられたデーターを，中心値 $a' = 4.00, b' = 3.00, \theta' = 30.0$ の真値に対する誤差 $\Delta a = a - a'$, $\Delta b = b - b', \Delta\theta = \theta - \theta'$ が $|\Delta a| \le 10^{-3}, |\Delta b| \le 10^{-3}, |\Delta\theta| \le 10^{-1}$ を満たす，と解釈する．まず，

$$S' = S(a', b', \theta') = \frac{1}{2}4\cdot 3\cdot\sin\frac{30\pi}{180} = \frac{1}{2}4\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 3. \tag{1}$$

また，

$$\frac{\partial S}{\partial a} = S_a(a', b', \theta') = \frac{1}{2}b'\sin\frac{\pi\theta'}{180} = \frac{1}{2}3\cdot\sin\frac{30\pi}{180} = \frac{3}{4},$$
$$\frac{\partial S}{\partial b} = S_b(a', b', \theta') = \frac{1}{2}a'\sin\frac{\pi\theta'}{180} = \frac{1}{2}4\cdot\sin\frac{30\pi}{180} = 1,$$
$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = S_\theta(a', b', \theta') = \frac{\pi}{360}a'b'\cos\frac{\pi\theta'}{180} = \frac{\pi}{360}4\cdot 3\cos\frac{30\pi}{180} = \frac{\pi\sqrt{3}}{60}$$

より，

$$\begin{aligned}|\Delta S| \cong |E| &= \left|\frac{\partial S}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial S}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial S}{\partial \theta}\Delta\theta\right| \le \left|\frac{\partial S}{\partial a}\right||\Delta a| + \left|\frac{\partial S}{\partial b}\right||\Delta b| + \left|\frac{\partial S}{\partial \theta}\right||\Delta\theta| \\ &\le \frac{3}{4}10^{-3} + 10^{-3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{60}10^{-1} = 0.010\cdots < 1.1\times 10^{-2}.\end{aligned} \tag{2}$$

これより， $S = (3.00 \pm 1.1\times 10^{-2})\ \mathrm{m}^2$ と考えられる．//

練習問題

底辺が $a\times a[\mathrm{m}^2]$ の正方形，側面の勾配が $\theta[°]$ のピラミッドの体積は $V = \frac{1}{6}a^3\tan\frac{\pi\theta}{180}[\mathrm{m}^3]$ である．各量の測量結果が $a = (100 \pm 1)\mathrm{m}, \theta = (45 \pm 1)°$ のとき，体積の範囲は？