数値解析第14回 非線形方程式・ニュートン法

1．ニュートン法

非線形方程式 $f(x)=0$ の解を α，初期値 $x_0 \cong \alpha$ とする．変位 Δx の方程式

$$f(x_0+\Delta x)=0\,. \tag{1}$$

を考える．解は $\Delta x=\alpha-x_0$ である($\because f(x_0+\underbrace{(\alpha-x_0)}_{\Delta x})=f(\alpha)=0$)．左辺はテイラー展開により，

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+O(\Delta x^2)\,.$$

$|\Delta x|$ は小さいとみて，$O(\Delta x^2)$ を無視すれば，近似方程式

$$f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=0$$

を得る．これを解いて，(1)の解 $\Delta x=\alpha-x_0$ の近似式

$$\Delta x_0=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\cong\alpha-x_0$$

を得る．これにより，改良された近似解

$$x_1=x_0+\Delta x_0,\ \Delta x_0=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

が得られる．この操作を繰り返して次の反復法を得る．

＜ニュートン法＞

適当な初期値 x_0 を取り，

$$x_{k+1}=x_k+\Delta x_k,\ \Delta x_k=-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad(k=0,1,\cdots)$$

［**例1**］(**平方根の計算**) 正数 $a>0$ の平方根 $\alpha=\sqrt{a}$ は方程式 $f(x)=x^2-a=0$ の正の解である．適当な正数 $x_0>0$ を初期値としたニュートン反復は次のように書ける．

$$x_{k+1}=x_k+\Delta x_k,\ \Delta x_k=-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=-\frac{x_k^2-a}{2x_k}\quad(k=0,1,\cdots)\,.$$

少し整理してやると，

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)\quad(k=0,1,\cdots)\,.$$

実際，$a=2$ のとき，$x_0=1.0$ を初期値に反復すると，

$$\begin{aligned}
x_1&=\underline{1}.5000\cdots, && \text{1桁正しい}\\
x_2&=\underline{1.41}666\cdots, && \text{3桁正しい}\\
x_3&=\underline{1.414215}686\cdots, && \text{6桁正しい}\\
x_4&=\underline{1.41421356237}46899\cdots && \text{12桁正しい}
\end{aligned}$$

となり，x_4 は12桁正しい！

1回の反復で正しい桁の数が約2倍になる．これが2次収束の特性である．x_5 を計算すると，

$$x_5=\underline{1.41421356237309504880168}9623\cdots\ \text{24桁正しい}$$

となり，予想通りである．

$p>1$ のとき，p 次収束では，1回の反復で正しい桁の数が約 p 倍になる．//

2．ニュートン法の収束次数

△ 解 α は m 重解： $f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(m-1)}(\alpha)=0$，$f^{(m)}(\alpha)\neq 0$．//

［**定理1**］ニュートン法で生成される近似列 $\{x_k\}_{k\geq 0}$ が単解 α に収束するなら，その**収束次数は2**である．//

（証明）

$$\lim_{x_k\to\alpha}\frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^2}=\lim_{x_k\to\alpha}\frac{\overbrace{x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}}^{x_{k+1}}-\alpha}{(x_k-\alpha)^2}\overset{L}{=}\lim_{x_k\to\alpha}\frac{1-\dfrac{f'(x_k)^2-f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2}}{2(x_k-\alpha)}$$

$$=\lim_{x_k\to\alpha}\frac{\dfrac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2}}{2(x_k-\alpha)}=\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)^2}\lim_{x_k\to\alpha}\frac{f(x_k)}{x_k-\alpha}\overset{L}{=}\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)^2}\lim_{x_k\to\alpha}f'(x_k)$$

$$=\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)^2}f'(\alpha)=\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

ゆえに x_k が α に十分近ければ，$|x_{k+1}-\alpha|\cong\left|\dfrac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right||x_k-\alpha|^2$ となり，2次収束が示された．//

［**例2**］例1において，誤差 $e_k=x_k-\sqrt{2}$ と $\dfrac{e_{k+1}}{e_k^2}$ を計算すると，次のようになる．

$$e_1=8.6\times 10^{-2},\ e_2=2.5\times 10^{-3},\ e_3=2.1\times 10^{-6},\ e_4=1.59\times 10^{-12}$$

$$\frac{e_2}{e_1^2}=0.333,\qquad \frac{e_3}{e_2^2}=0.353,\qquad \frac{e_3}{e_2^2}=0.354$$

［**定理2**］ $m\geq 2$ で，ニュートン法で生成される近似列 $\{x_k\}_{k\geq 0}$ が m 重解 α に収束するなら，その**収束次数は1**，収束率は $\dfrac{m-1}{m}$ である．//

［**例3**］ $f(x)=x^2=0$ の解 $x=0$ は重解である． $x_0\neq 0$ を初期値としたニュートン反復は，

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^2}{2x_k}=\frac{1}{2}x_k\quad(k=0,1,\cdots)$$

である．$\{x_k\}$ は公比 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列で，収束率 $\dfrac{1}{2}$ で1次収束する．//

注意：ニュートン法の収束は速いが，初期値が不適切だと収束しないこともある．

練習問題

例1において，次のことを示せ．

(1) $x_{k+1}-\sqrt{a}=\dfrac{1}{2x_k}\left(x_k-\sqrt{a}\right)^2$．（ヒント： $x_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_k+\dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{x_k}\right)$ ）

(2) $x_k>\sqrt{a}$ なら， $x_k>x_{k+1}>\sqrt{a}$ を示せ．（ヒント：(1)）

(3) $x_k>\sqrt{a}$ なら，$\left|x_{k+1}-\sqrt{a}\right|<\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\left|x_k-\sqrt{a}\right|^2$．（ヒント：(1)）