数値解析第13回 非線形方程式・二分法

1．非線形方程式

1変数の方程式 $f(x)=0$ の解 α を求める反復解法を考える．

△ **反復解法：** $\lim_{k\to\infty} x_k=\alpha$ となる数列 $x_0,x_1,\cdots$ を生成し，適当な k で $x_k\cong\alpha$ とする．

◎ **収束次数**

△ $\{x_k\}_{k\ge 0}$ は1次収束：定数 $C>0$ と $0\le r<1$ があって，十分大きい k で $|x_k-\alpha|\le Cr^k$．//

△ $\{x_k\}_{k\ge 0}$ は p 次収束($p>1$)：定数 $C>0$ があって，十分大きい k で $|x_{k+1}-\alpha|\le C|x_k-\alpha|^p$．//

☆ 収束次数 p が大きいほど収束は速い．1次収束では収束率 r が小さいほど収束は速い．//

［**例1**］2次収束で $C=1$ とすると $|x_{k+1}-\alpha|\le|x_k-\alpha|^2$ である．$|x_k-\alpha|\le 10^{-1}$ なら，

$$|x_{k+1}-\alpha|\le 10^{-2}\overset{\text{右辺２乗}}{\Rightarrow}|x_{k+2}-\alpha|\le 10^{-4}\overset{\text{右辺２乗}}{\Rightarrow}|x_{k+3}-\alpha|\le 10^{-8}\overset{\text{右辺２乗}}{\Rightarrow}|x_{k+4}-\alpha|\le 10^{-16}\text{．//}$$

◎ **収束判定**

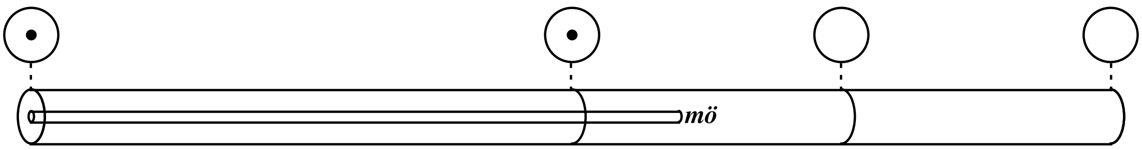
1．誤差を基準とする判定：許容誤差 $\varepsilon>0$ を設定し，$|x_k-\alpha|\le\varepsilon$ と判断されるなら停止．

2．残差を基準とする判定：残差誤差 $\varepsilon>0$ を設定し，$|f(x_k)|\le\varepsilon$ と判断されるなら停止．

2．二分法

アルゴリズム理論では，解の存在領域を半分半分に縮めてゆく方法の総称．

［**例2**］(イモムシ狩り) 10.24mの丸太を左からイモムシが喰い進んでいる．丸太を中点で切断して5.12mの丸太2本にする．切断面に喰い穴が無ければ左側の丸太，喰い穴が有れば右側の丸太にイモムシが居る．1回の切断で，イモムシの居る半分の長さの丸太が得られる．この操作を10回続けると，イモムシの居る，長さ $1024/2^{10}=1$ cmの丸太(？)が得られる．//



［**中間値の定理**］区間 $[a,b]$ の連続関数 $f(x)$ が条件「 $f(a)f(b)\le 0$ (およそ $f(a)$, $f(b)$ 異符号)」を満たすなら， $f(\alpha)=0$ となる $\alpha\in[a,b]$ が存在する．//

この定理の条件を満たす $f(x)$ について方程式 $f(x)=0$ の解 α を求める二分法を考える．

☆ $[a,b]$ の中点 $c=(a+b)/2$ とする． $f(a)f(c)\le 0$ なら $[a,c]$ に， $f(c)f(b)\le 0$ なら $[c,b]$ に解が存在する．いずれにしろ，**解の存在する半幅の区間が得られる**．//

＜アルゴリズム(二分法)＞

(0) 初期区間 $[a_0,b_0]$ を $f(a_0)f(b_0)\le 0$ となるように設定．許容誤差 $\varepsilon>0$ を設定．

$$y_0=f(a_0),n=\left\lceil\log_2\frac{b_0-a_0}{\varepsilon}\right\rceil-1$$ とする．($\lceil x\rceil$ は x 以上の整数の最小値．ceiling関数)

(1) $k=0,1,\cdots,n-1$ で，次の区間2等分割を行う

$c_k=(a_k+b_k)/2$；

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, c_k] & (y_0 f(c_k) \le 0), \\ [c_k, b_k] & (\text{それ以外}); \end{cases}$$

(2) $x = (a_n + b_n)/2$ を近似解として採用．//

☆ 上記アルゴリズムの $n = \left\lceil \log_2 \dfrac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \right\rceil - 1$ は $|x - \alpha| \le \varepsilon$ を保証する最小の分割回数である．//

（証明） $\alpha \in [a_n, b_n]$, $x = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ と $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$ より， $|x - \alpha| \le \dfrac{b_n - a_n}{2} = \dfrac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$．任意の α で不等式 $|x - \alpha| \le \varepsilon$ が成り立つには， $\dfrac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \le \varepsilon$．これを n について解いて， $n \ge \log_2 \dfrac{b_0 - a_0}{\varepsilon} - 1$． n は整数だから， $n \ge \left\lceil \log_2 \dfrac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \right\rceil - 1$．最小数は， $n = \left\lceil \log_2 \dfrac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \right\rceil - 1$ である．//

［**例3**］方程式 $f(x) = \cos x - x = 0$ を二分法で解く．許容誤差を $\varepsilon = 10^{-3}$ とする．(1) 適切な初期区間の設定と，(2) 分割回数の決定を行う．

(1) $f(0) = \cos 0 - 0 = 1 > 0$, $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) - \pi/2 = -\pi/2 < 0$ より， $f(0)f(\pi/2) < 0$．そこで，初期区間を $[a_0, b_0] = [0, \pi/2]$ とする．

(2) $\dfrac{b_0 - a_0}{\varepsilon} = \dfrac{\pi/2}{10^{-3}} = 500\pi$． $2^{10} = 1024 = 500 \times 2.048 < 500\pi < 500 \times 4.096 = 2048 = 2^{11}$ より，

$$10 < \log_2 \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} < 11. \quad \therefore n = \left\lceil \log_2 \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \right\rceil - 1 = 11 - 1 = 10\text{．//}$$

［**定理**］二分法は収束率1/2で一次収束する．//（証略）

3．中間値の定理の証明

二分法の根拠は中間値の定理にあるように説明したが実は逆である．二分法を使って中間値の定理が証明されるのである．簡単のため， $f(a_0) < 0 < f(b_0)$ とし，区間 $[a_0, b_0]$ に $f(\alpha) = 0$ となる α が存在することを示す．

（証明）二分法が生成する区間 $[a_k, b_k]$ の端点の列は

$$a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_k \le a_{k+1} \le \cdots \le b_{k+1} \le b_k \le \cdots \le b_1 \le b_0$$

となる． $\{a_k\}, \{b_k\}$ は単調で有界ゆえ極限を持つ．また， $\lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty} 2^{-k}(b_0 - a_0) = 0$ だから， $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k$．この極限を $\alpha = \lim_{k\to\infty} a_k$ とすると， $f(x)$ の連続性と $f(a_k) \le 0 \le f(b_k)$ より，

$$0 \le \lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(\alpha) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) \le 0\text{．}$$

すなわち， $f(\alpha) = 0$ である．//

練習問題

方程式 $f(x) = e^x - x^3$ を解く二分法の初期区間として $[a_0, b_0] = [0, 2]$ が適切であることを示せ．また，許容誤差 $\varepsilon = 10^{-3}$ のときの最小分割回数 n を求めよ．