数値解析第３回 四則演算の誤差伝播

四則演算を2入力 x, y で1出力 z の関数と考える．次のように記号を定める．

近似入力： x', y'，　　入力誤差： $\Delta x = x' - x$, $\Delta y = y' - y$，

近似出力： z'，　　出力誤差： $\Delta z = z' - z$．

1．加減算　$z = f(x,y) = x \pm y$

$$z = x \pm y, z' = x' \pm y' = (x + \Delta x) \pm (y + \Delta y) = \underbrace{(x \pm y)}_{z} + \underbrace{(\Delta x \pm \Delta y)}_{\Delta z}$$ より，

・誤差　　：$\Delta z = z' - z = \Delta x \pm \Delta y$

・絶対誤差：$|\Delta z| = |\Delta x \pm \Delta y| \le |\Delta x| + |\Delta y|$

出力絶対誤差は入力絶対誤差の和より小さい(たいしたことない)．

・相対誤差：$\dfrac{|\Delta z|}{|z|} \le \dfrac{|\Delta x| + |\Delta y|}{|z|} = \left|\dfrac{x}{z}\right|\left|\dfrac{\Delta x}{x}\right| + \left|\dfrac{y}{z}\right|\left|\dfrac{\Delta y}{y}\right|$

出力相対誤差が入力相対誤差より大きいことがある($\left|\dfrac{x}{z}\right|, \left|\dfrac{y}{z}\right|$ が大きいとき)．

◎**桁落ち**：加減算による相対誤差の拡大＝有効桁数の減少

$x \cong y$ の減算，$x \cong -y$ の加算で発生．$|z|$ が $|x|, |y|$ に比べ小さく，$\left|\dfrac{x}{z}\right|, \left|\dfrac{y}{z}\right|$ が大きい．

［例］

$$\begin{array}{rll} & x = 0.1234543 & \rightarrow \quad x' = 0.12345 \\ -) & y = 0.1234402 & \rightarrow \quad y' = 0.12344 \\ \hline & z = 0.0000141 & \qquad\; z' = 0.00001 \end{array}$$

x', y' は有効数字5桁，z' は有効桁数1桁．4桁の桁落ち．//

☆ <u>加減算には桁落ちの現象があり，相対精度の劣化が起き得る．注意危険！</u>

2．乗算　$z = f(x,y) = xy$　　$\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} = y, \dfrac{\partial z}{\partial y} = x\right)$

・誤差　　：$\Delta z = z - z' \cong E = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y = y\Delta x + x\Delta y$

・絶対誤差：$|\Delta z| \cong |E| \le |y||\Delta x| + |x||\Delta y|$

・相対誤差：$\dfrac{|\Delta z|}{|z|} \cong \dfrac{|E|}{|xy|} \le \dfrac{|y||\Delta x|}{|xy|} + \dfrac{|x||\Delta y|}{|xy|} = \dfrac{|\Delta x|}{|x|} + \dfrac{|\Delta y|}{|y|}$

出力相対誤差は入力相対誤差の和より小さい(たいしたことない)．

3．除算　$z = f(x,y) = \dfrac{x}{y}$　　$\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-x}{y^2}\right)$

・誤差　　：$\Delta z = z - z' \cong E = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \dfrac{\Delta x}{y} - \dfrac{x\Delta y}{y^2}$

・絶対誤差：$|\Delta z| \cong |E| \le \left|\dfrac{1}{y}\right||\Delta x| + \left|\dfrac{x}{y^2}\right||\Delta y|$

・相対誤差：$\dfrac{|\Delta z|}{|z|} \cong \dfrac{|E|}{|x/y|} \le \left|\dfrac{y}{x}\right|\left|\dfrac{1}{y}\right||\Delta x| + \left|\dfrac{y}{x}\right|\left|\dfrac{x}{y^2}\right||\Delta y| = \dfrac{|\Delta x|}{|x|} + \dfrac{|\Delta y|}{|y|}$

☆ 乗除算では，相対誤差は拡大伝播しない．安心！

［例］乗除算の相対誤差 $\cong$ 入力の相対誤差

真値： $L = e\pi = 2.71828\cdots \times 3.14159\cdots = 8.53973\cdots$,　近似計算： $L' = 2.72 \times 3.14 = 8.5408$,

相対誤差： $\left|\dfrac{L'-L}{L}\right| = 1.2\cdots \times 10^{-4}$,　　有効桁数： $-\log_{10}\left|\dfrac{L'-L}{L}\right| = 3.9\cdots$． //

4．桁落ちの回避

一般には，入力の精度を上げるしかないが，うまく回避できることもある．

［技法1］(有理化) $|x| << 1$ のとき， $\sqrt{1+x}-1 \cong 1-1$ は桁落ち計算．分子を有理化した下式最右辺は桁落ちしない．

$$\sqrt{1+x}-1 = \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{(1+x)-1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{x}{\sqrt{1+x}+1}. \quad //$$

［技法2］(和積公式) $|x| << 1$ のとき， $\sin(a+x)-\sin a \cong \sin a - \sin a$ は桁落ち計算．和積公式により変形した下式最右辺は桁落ちしない．

$$\sin(a+x)-\sin a = 2\cos\left(a+\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}. \quad //$$

［技法3］(指数法則) $|x| << 1$ のとき， $e^{a+x}-e^{a} \cong e^{a}-e^{a}$ は桁落ち計算．指数法則により変形した下式最右辺は桁落ちしない．

$$e^{a+x}-e^{a} = e^{a+x/2}\left(e^{x/2}-e^{-x/2}\right) = 2e^{a+x/2}\left(\frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{2}\right) = 2e^{a+x/2}\sinh\frac{x}{2}.$$

一般的には，

$$e^{A}-e^{B} = e^{(A+B)/2}\left(e^{(A-B)/2}-e^{-(A-B)/2}\right) = 2e^{(A+B)/2}\sinh\frac{A-B}{2}$$

という変形を使う． //

［例］(複合型) $|x| << 1$ のとき， $e^{\sin(a+x)}-e^{\sin(a-x)} \cong e^{\sin a}-e^{\sin a}$ は桁落ち計算．

$$\begin{aligned} e^{\sin(a+x)}-e^{\sin(a-x)} &= e^{\{\sin(a+x)+\sin(a-x)\}/2}\left(e^{\{\sin(a+x)-\sin(a-x)\}/2}-e^{-\{\sin(a+x)-\sin(a-x)\}/2}\right) \\ &\overset{A}{=} 2e^{\{\sin(a+x)+\sin(a-x)\}/2}\sinh\left(\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{2}\right) \overset{B}{=} 2e^{\sin a\cos x}\sinh\left(\cos a \sin x\right) \end{aligned}$$

の最右辺は桁落ちしない．等号 A は技法3，等号 B は技法2である． //

練習問題

$|x| << 1$ のとき，次の式が桁落ち計算であることを示せ．また，桁落ちしない計算式を示せ．

(1) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$　　(2) $\tan(a+x)-\tan a$　　(3) $e^{x}-1$　　(4) $e^{\sqrt{1+x}}-e^{\sqrt{1-x}}$

第3回練習問題

$|x| << 1$ のとき，次の式が桁落ち計算であることを示せ．また，桁落ちしない計算式を示せ．

(1) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$　(2) $\tan(a+x)-\tan a$　(3) e^x-1　(4) $e^{\sqrt{1+x}}-e^{\sqrt{1-x}}$

練習問題解答

(1) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} \cong 1-1$ ゆえ，桁落ち計算．

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{(1+x)-(1-x)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\ .$$

(2) $\tan(a+x)-\tan a \cong \tan a-\tan a=0$ ゆえ，桁落ち計算．

$$\tan(a+x)-\tan a=\frac{\sin(a+x)}{\cos(a+x)}-\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{\sin(a+x)\cos a-\sin a\cos(a+x)}{\cos(a+x)\cos a}=\frac{\sin x}{\cos(a+x)\cos a}\ .$$

(3) $e^x-1 \cong 1-1$ ゆえ，桁落ち計算．

$$e^x-1=e^{x/2}\left(e^{x/2}-e^{-x/2}\right)=2e^{x/2}\,\frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{2}=2e^{x/2}\sinh\frac{x}{2}\ .$$

(4) $e^{\sqrt{1+x}}-e^{\sqrt{1-x}} \cong e-e=0$ ゆえ，桁落ち計算．

$$\begin{aligned}e^{\sqrt{1+x}}-e^{\sqrt{1-x}}&=e^{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)/2}\left(e^{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)/2}-e^{-\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)/2}\right)\\&=2e^{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)/2}\sinh\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}\\&=2e^{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)/2}\sinh\frac{x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}.\end{aligned}$$