数学科教育法A　レポート課題＜教科書作成＞

1. 編集方針と構成の説明・解説

今回、私は数学Ⅱの「図形と方程式」から「軌跡と領域」の範囲の教科書を作成する。

数学Ⅱは、数学Ⅰを履修した後に、履修させることが原則とされており、この科目では、高等学校数学の根幹をなす内容を学習する。数学Ⅰで学習した内容を発展、拡充させ、数学Ⅱで広い数学的な資質・能力を育てることが目的である。

数学Ⅱで学習する「図形と方程式」は、「図形や式を用いて、直線や円などの基本的な平面図形の性質や関係を数学的に表現し、その有用性を認識するとともに、事象の考察に活用できるようにする。」と学習指導要領で表記されている。そのなかの「軌跡と領域」では、「軌跡について理解し、簡単な場合について軌跡を求めること。また、簡単な場合について、不等式の表す領域を求めたり領域を不等式で表したりすること。」と表記されている。つまり、ここでは軌跡とは何かを示し、図形を与えられた条件を満たす点の集合としてみる考えに対しての理解を深めることが求められる。方程式を満たす点の集合が座標平面上の軌跡を表すことを理解させ、軌跡が直線や円またはそれらの一部となるような簡単な場合について、実際に軌跡を求めることができるようにすること、また、不等式を満たす点の集合が座標平面上の領域を表すこと、領域の境界線が直線あるいは円となるような簡単な場合について、いくつかの不等式で表される領域を求めたり、逆に、領域を不等式で表したりして、平面図形と不等式との関係について理解を深め、さらには、不等式の表す領域を線形計画法などに活用する活動を通して、その有用性を認識させることが求められる。

この「軌跡と領域」の範囲は、数学Ⅱのなかでも生徒にとってはなかなか理解しにくく、難しいとされるところである。そのため、教え方には工夫が必要とされる。教科書に表記されていることをいかに生徒目線にたって教え、伝えることができるかが重要であるが、そのもととなる教科書もとても大切な存在である。そこで私は、まず教科書では基本を抑え、根本的なことを理解させるために、具体例を出して「軌跡とは何か」「領域とは何か」をそれぞれ冒頭に示した。言葉だけで示すより、図で表したり、図とともに具体例で示したほうが効果的だと思ったからである。そして、問題は1回ずつ、例題を示したあとに練習問題を解かせるというスタンスをとることにした。教える側が一方的に例題ばかり示すのではなく、示したそのあとに練習問題を解かせることによって、その学習内容の定着を図ることがねらいである。また、軌跡のところでは、どの教科書をみても、軌跡を証明するところで反例がのっておらず、個人的にはもう少し説明を補足すれば、生徒も理解しやすくなると思い、載せるよう工夫した。

教科書は以下の内容で構成されている。

第1章　軌跡と領域

第1節　軌跡

1-1. 軌跡とは

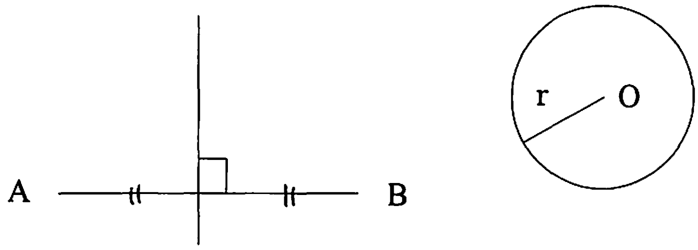


図1　垂直二等分線　と　円

図1の左の垂直二等分線は、点Aと点Bから等しい距離である点の集合である。
図1の右の円は、中心Oからの距離が一定値rであるような点の集合である。

このように、与えられた条件を満たす点全体の集合を、その条件の満たす点の**軌跡**という。
つまり、垂直二等分線も円もそれぞれ軌跡なのである。

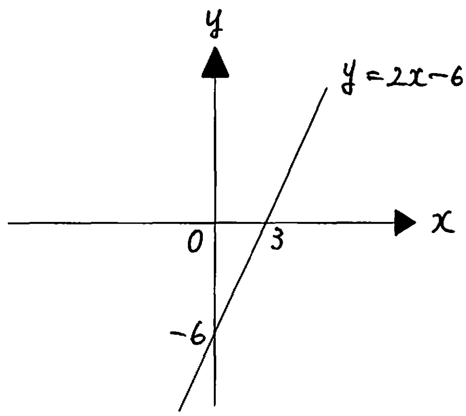
座標を利用して軌跡を求めることができる。

<u>例題1．2点A(0,4), B(8,0)から等距離にある点Pの軌跡を求めよ。</u>

解. Ⅰ. 点Pの座標を (x, y) とする。
条件より $AP=BP$ とおくことができ、
両辺を2乗すると、 $AP^2=BP^2$ であるから、
$x^2+(y-4)^2=(x-8)^2+y^2$
整理すると　$2x-y-6=0$
よって、点Pは直線　$2x-y-6=0$　上にある。

Ⅱ. 逆に、この直線上の任意の点はP(t,2t-6)と表され、
$AP^2=t^2+(2t-10)^2=5t^2-40t+100$
$BP^2=(t-8)^2+(2t-6)^2=5t^2-40t+100$
であるから　$AP^2=BP^2$
すなわち $AP=BP$

Ⅰ、Ⅱより、求める軌跡は直線　$2x-y-6=0$　である。



一般に、与えられた条件を満たす点の軌跡が図形Fであることを証明するには、次のⅠ、Ⅱを示せばよい。

Ⅰ. 与えられた条件を満たす点は、図形F上にある。
Ⅱ. 逆に、図形F上のすべての点は、与えられた条件を満たす。

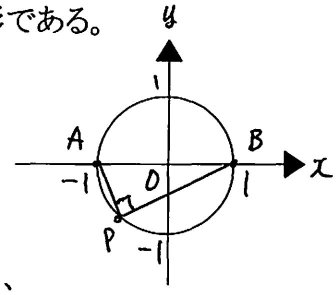
前述の例題1では、上のⅠ、Ⅱにしたがったが、Ⅱは明らかである場合はその証明を省略することが多い。

※明らかでない場合

参考問題. 2点 A(-1, 0), B(1,0)に対して∠APB が直角となる点 P の軌跡を求めよ。

解. 点 P の座標を (x, y) とする。

∠APB が直角であるから、△APB は辺 AB を斜辺とする直角三角形である。



よって、三平方の定理により、

$$AP^2+BP^2=AB^2$$

すなわち $(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2=2^2$

整理して $x^2+y^2=1^2$

よって、点 P は円 $x^2+y^2=1^2$ 上にある。

ただし、P が円上にある点 A、B に一致したときは角がつくれないため、除かなければならない。

逆に、この円の、2点(-1,0), (1,0)を除くすべての点 P (x, y) は条件を満たす。

したがって、求める軌跡は

原点を中心をする半径1の円

ただし、点(-1,0),(1,0)を除く。

練習問題1. 次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(1) 2点 A(3,0), B(0,6)から等距離にある点 P

(2) 2 点 A(-3,0), B(3,0)に対して、 $AP^2+BP^2=20$

1-2. アポロニウスの円

例題2. 2点 A(0,0), B(5,0) AP:BP=2:3 である点 P の軌跡を求めよ。

解. 点 P の座標を (x, y) とする。

P の満たす条件は AP:BP=2:3

すなわち 3AP=2BP

両辺を2乗して、 $9AP^2=4BP^2$

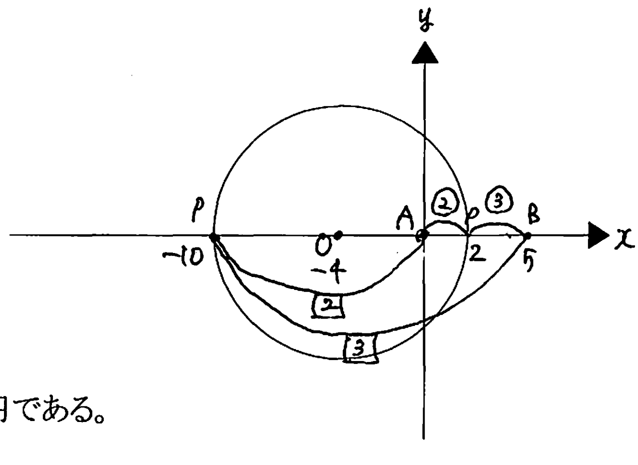
これを座標で表すと、

$$9(x^2+y^2)=4((x-5)^2+y^2)$$

整理すると $x^2+y^2+8x-20=0$

すなわち $(x+4)^2+y^2=6^2$

ゆえに、点 P の軌跡は中心(-4,0)、半径 6 の円である。



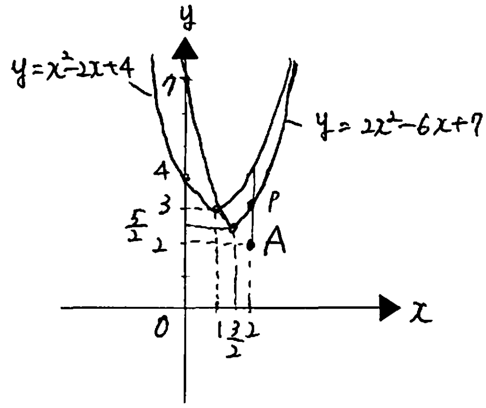
＜参考＞

一般に m≠n のとき、2定点 A、B に対し、AP:BP=m:n を満たす点 P の軌跡は、線分 AB を m:n に内分する点と外分する点を直径の両端とする円になる。この円をアポロニウスの円という。

練習問題2. 2点 A(-6,0), B(2,0) に対して、AP:BP=3:1 であるような点 P の軌跡を求めよ。

1-3. 媒介変数表示

<u>例題3. 放物線 $y=x^2-2x+4$ 上の点をPとし、定点をA(2,2)とする。線分APの中点Qの軌跡を求めよ。</u>



解. 点Pの座標を(s,t)、点Qの座標を(x,y)とする。

点Pは放物線上の点であるから、 $t=s^2-2s+4$ …①

点Qは線分AQの中点であるから、 $x=(s+2)/2,\ y=(t+2)/2$

すなわち $s=2x-2, t=2y-2$ …②

これらを①に代入すると

$$2y-2=(2x-2)^2-2(2x-2)+4$$

すなわち $2y-2=4x^2-8x+4-4x+4+4$

これを整理して $y=2x^2-6x+7$

ゆえに、点Qの軌跡は放物線 $y=2x^2-6x+7$ である。

(頂点(3/2,5/2)の下に凸な放物線である。)

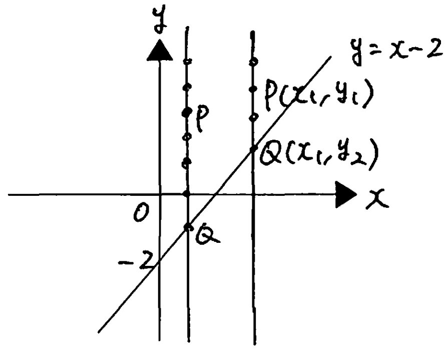
<u>練習問題3. 点A(1,2)に対して、点Pが円x^2+y^2=9上を動くとき、次の点の軌跡を求めよ。</u>

(1)線分APの中点M

(2)線分APを1:2に内分する点Q

第2節. 不等式の表す領域

2-1. 直線を境界線とする領域



座標平面上で、x, yの1次方程式

$$y=x-2 \quad \cdots ①$$

を満たす点(x, y)全体の集合は直線を表す。ここでは、不等式

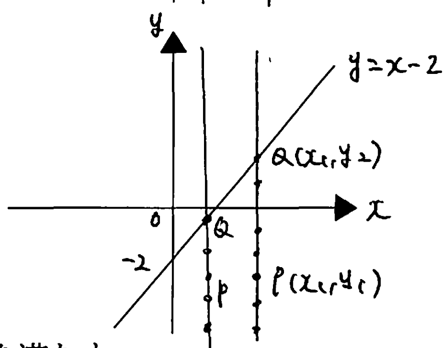
$$y>x-2 \quad \cdots ②$$

を満たす点(x, y)全体の集合がどのような図形を表すか調べてみよう。

不等式②を満たす任意の点 $P(x_1, y_1)$ をとると、

$$y_1>x_1-2 \quad \cdots ③$$

が成り立つ。



また、Pを通り、x軸に垂直な直線と直線①の交点を $Q(x_1, y_2)$ とすると、

$$y_2=x_1-2 \quad \cdots ④$$

である。

③、④から $y_1>y_2$

ゆえに、点Pは直線①より上側にある。

逆に、点 $P(x_1, y_1)$ が直線①より上側にあると、 $P(x_1, y_1)$ は②を満たす。

したがって、不等式②を満たす点(x, y)全体の集合は、直線①より上側の部分である。

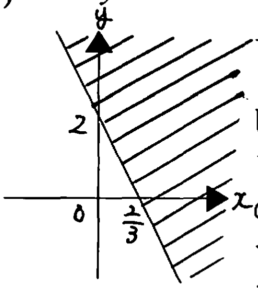
同様に、不等式 $y<x-2$ を満たす点(x, y)全体の集合は、直線①より下側の部分である。

一般に、変数x, yについての不等式を満たす点 (x, y) 全体の集合を、その不等式の表す**領域**という。

$y\geq x-2$ や $y\leq x-2$ の表す領域は、それぞれ $y>x-2$ の表す領域と直線 $y=x-2$ 、$y<x-2$ の表す領域と $y=x-2$ を合わせたもので、境界線を含む領域になる。

例題4. 次の不等式を表す領域を図示せよ。

(1) $3x+y-2>0$



与えられた不等式より

$y>-3x+2$

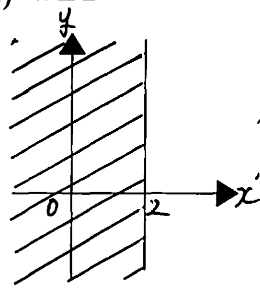
したがって、求める領域は

直線　$y=-3x+2$

の上側である。

すなわち、左の図の斜線部分である。ただし、境界線は含まない。

(2) $x\leq 2$



求める領域は

$x\leq 2$　を満たす x と任意の y を座標とする点(x、y)の全体である。

したがって、直線

$x=2$　および、

その右側である。

すなわち、左の図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。

練習問題4. 次の不等式の表す領域を求めよ。

(1) $y>3x+2$
(2) $3x-4y\leq -12$
(3) $y\leq 2$
(4) $x>-3$

2-2. 円の内部・外部

不等式　$(x-2)^2+(y-3)^2<4$　…①

の表す領域を考えてみよう。

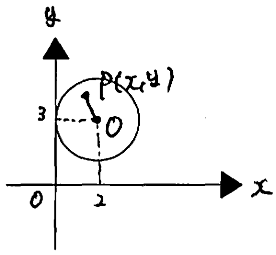
中心 O(2,3) と点 P(x, y) の距離 OP は

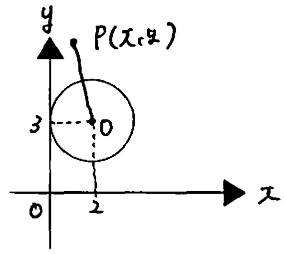
$OP=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$　であるから、不等式①は

$OP^2<4$　すなわち　OP<2

が成り立つことを示している。

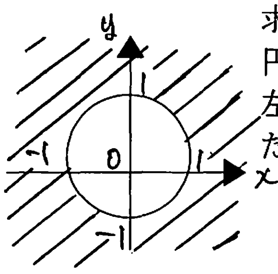
同様に、$(x-2)^2+(y-3)^2>4$　は　OP＞2が成り立つことを示している。





例題5. 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $x^2+y^2>1$



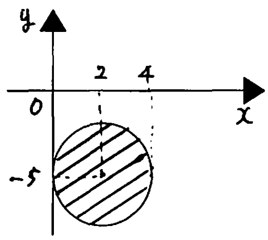
求める領域は、

円　$x^2+y^2=1$　の外部で

左の図の斜線部分である。

ただし、境界線を含まない。

(2) $(x-2)^2+(y+5)^2\leq 4$



求める領域は、

円　$(x-2)^2+(y+5)^2=4$

の周および内部で、左の斜線部分である。ただし、境界線を含む。

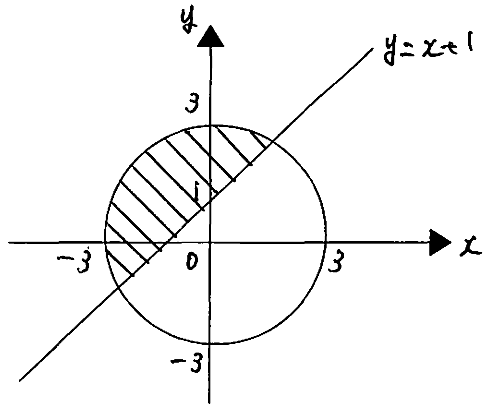
練習問題5. 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $x^2+y^2\geq 9$
(2) $x^2+y^2<8$
(3) $(x-3)^2+(y-4)^2\geq 10$
(4) $x^2+y^2+4x-6y+8<0$

2-3. 連立不等式の表す領域

２つの不等式を同時に満たす点全体の集合は、それぞれの不等式が表す領域の共通部分である。 $x^2+y^2>9$

例題6. 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。



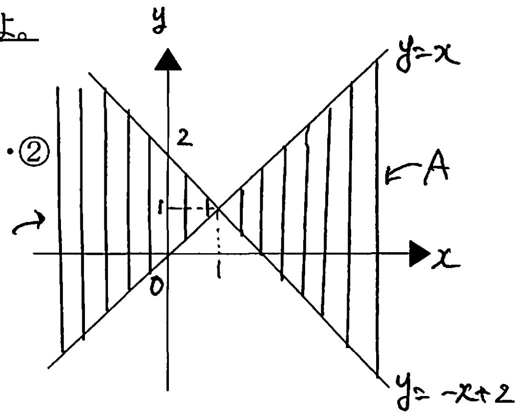
$$\begin{cases} x^2+y^2<9 & \cdots ① \\ y>x+1 & \cdots ② \end{cases}$$

①の表す領域は、 $x^2+y^2=9$ の内部
②の表す領域は、 $y=x+1$ の上側
与えられた連立不等式の表す領域は、
①、②の表す領域の共通部分であるから、
右の図の斜線部分となる。ただし、境界線は含まない。

練習問題6. 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $\begin{cases} x+y<3 \\ 2x-y<6 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x^2+y^2\geq 16 \\ (x-4)^2+y^2\leq 1 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x+2y-4\leq 0 \\ x-y+2\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$

例題7. 不等式 $(x-y)(x+y-2)>0$ の表す領域を図示せよ。



与えられた不等式は

$$\begin{cases} x-y>0 \\ x+y-2>0 \end{cases} \cdots ① \quad \text{または} \quad \begin{cases} x-y<0 \\ x+y-2<0 \end{cases} \cdots ②$$

が成り立つことと同値である。
よって、求める領域は、①の表す領域Aと②の表す領域Bの和集合で、右の図の斜線部分である。
ただし、境界線を含まない。

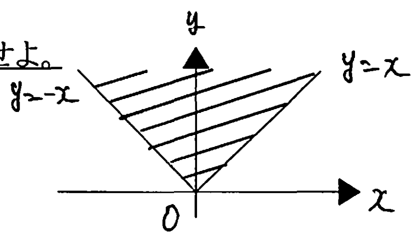
練習問題7. 不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $(3x+4y-12)(x-2y+4)\leq 0$　(2) $(x^2+y^2-1)(2x-y-1)>0$

2-4. いろいろな不等式の表す領域

不等式の表す領域では、境界線が円や直線でないものもあるため、下の例題とともに考えてみよう。

例題8. 次の不等式の表す領域を図示せよ。



(1) $y\geq|x|$
$x\geq 0$ のとき、 $y\geq x$
$x<0$ のとき、 $y\geq -x$

求める領域は、右の図の斜線部分である。
ただし、境界線を含む。

(2) $|x|+|y|<2$

$x\geq 0, y\geq 0$ のとき　$x+y<2$

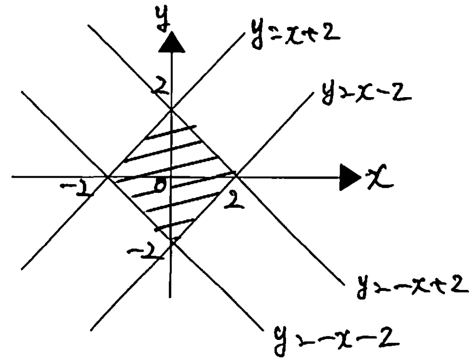
$x<0, y\geq 0$ のとき　$-x+y<2$

$x<0, y<0$ のとき　$-x-y<2$

$x\geq 0, y<0$ のとき　$x-y<2$

であるから、右の図の斜線部分となる。

ただし、境界線は含まない。



練習問題8. 不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$y<|x+1|$　　　　(2)　$|x|+|y|\leq 1$

2-5. 領域と最大・最小＜線形計画法＞

点 (x, y) がある領域内を動くとき、x, y の1次式 $ax+by$ のとる値の範囲を調べてみよう。

例題9. 連立不等式　$x\geq 0, y\geq 0, 2x+3y\leq 12, 2x+y\leq 8$ の表す領域Dを図示し、点 (x, y) がこの領域を動くとき、$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

解. 領域Dは、右の図のように

O(0,0), A(4,0), B(3,2), C(0,4) を頂点とする

四角形の内部および周である。

$x+y$ を k とおくと、

$x+y=k$　　$\cdots$①

これを変形すると

$y=-x+k$

となるから、①は傾きが−1、y 切片が k

の直線を表し、k の値が増加すれば、

下から上に移動する。

よって、この直線①がDと共有点をもつような k

の値のうち、最大のものと最小のものを求めればよい。

図からもわかるように、k の値が

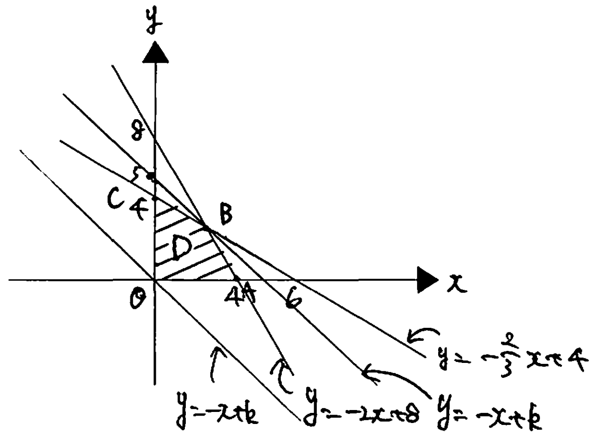
最大になるのは直線①が頂点Bを通るとき、

最小になるのは直線①が原点Oを通るときである。

したがって、①の k、すなわち $x+y$ は

$x=3, y=2$ のとき、最大値5 をとり、

$x=0, y=0$ のとき、最大値0 をとる。



練習問題9. 連立不等式　$x\geq 0, y\geq 0, x+2y\leq 4, x-y\leq 1$ の表す領域Dを図示し、点 (x, y) がこの領域を動くとき、$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

＜解答＞

練習問題1.

(1) $(x-3)^2+y^2=x^2+(y-6)^2$

$-6x+12y-27=0$

直線　$2x-4y+9=0$

(2) $(x+3)^2+y^2+(x-3)^2+y^2=20$

$2x^2+18+2y^2=20$

円　$x^2+y^2=1$

練習問題2.

AP:BP=3:1 より AP=3BP

両辺を2乗して、　$AP^2=9BP^2$

$(x+6)^2+y^2=9((x-2)^2+y^2)$

$x^2+y^2-6x=0$

$(x-3)^2+y^2=9$

よって、求める軌跡は、中心(3, 0)、半径 3 の円

練習問題3.

(1) P(s, t), M(x, y)とおく。

点Pは円上の点であるから、　$s^2+t^2=9$　…①

点Mは線分APの中点であるから、　$x=1+s/2, y=2+t/2$

すなわち、　$s=2x-1, t=2y-2$

これを①に代入すると、

$(2x-1)^2+(2y-2)^2=9$

円　$(x-1/2)^2+(y-1)^2=9/4$

(2) P(s, t), Q(x, y)とおく。

点Pは円上の点であるから、　$s^2+t^2=9$　…①

点qは線分APを 1:2 に内分する点であるから、　$x=2+s/3, y=4+t/3$

すなわち、　$s=3x-2, t=3y-4$

これを①に代入すると、

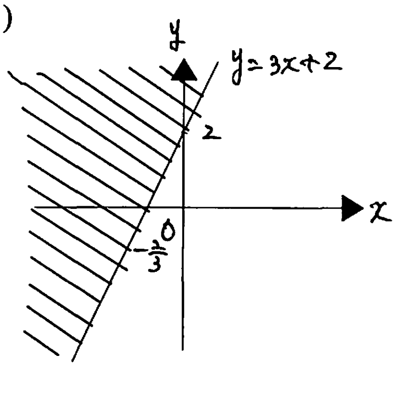
$(3x-2)^2+(3y-4)^2=9$

円　$(x-2/3)^2+(y-4/3)^2=1$

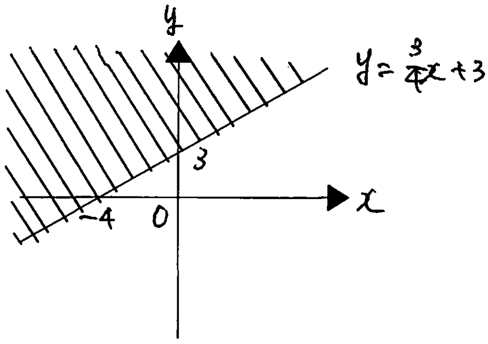
練習問題4.

求める領域は図の斜線部分である。

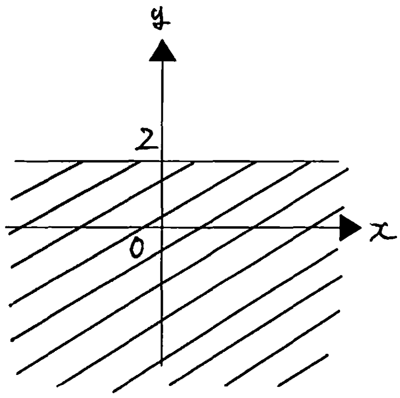
(1)



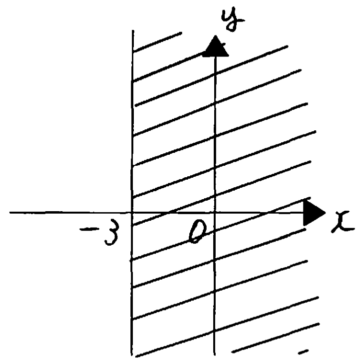
(2)



(3)



(4)

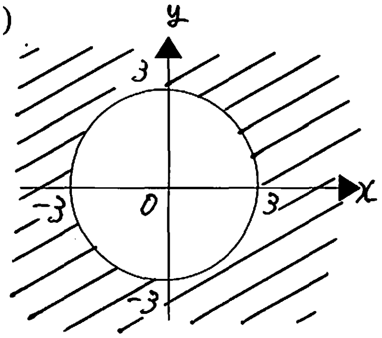


(1)、(4)は境界線を含まない。(2)(3)は境界線を含む。

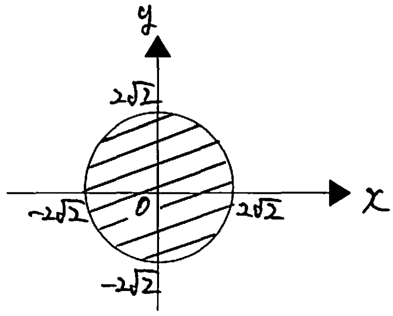
練習問題5.

求める領域は図の斜線部分である。

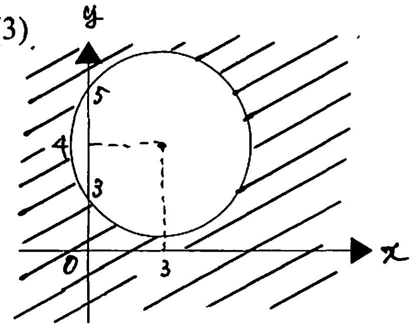
(1)



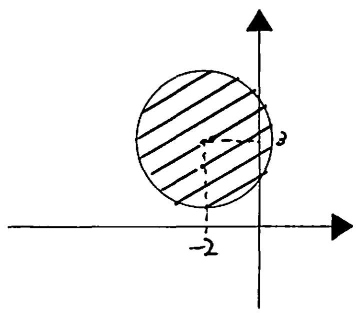
(2)



(3)



(4)

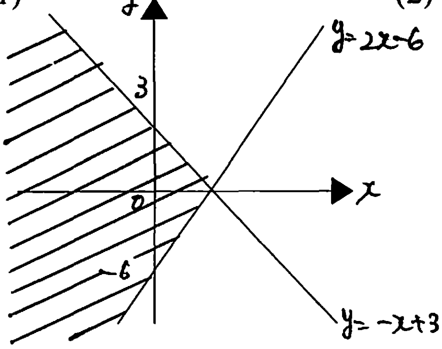


(1)、(3)は境界線を含む。(2)、(4)は境界線を含まない。

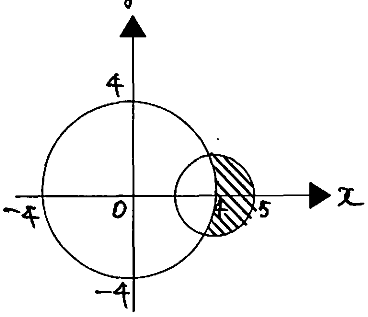
練習問題6.

求める領域は図の斜線部分である。

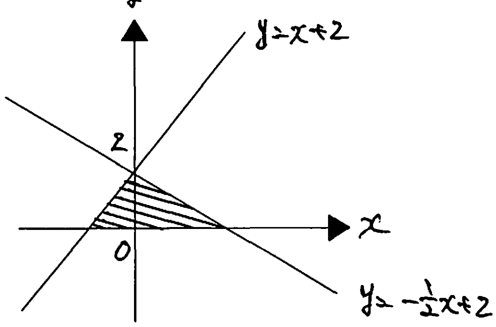
(1)



(2)



(3)

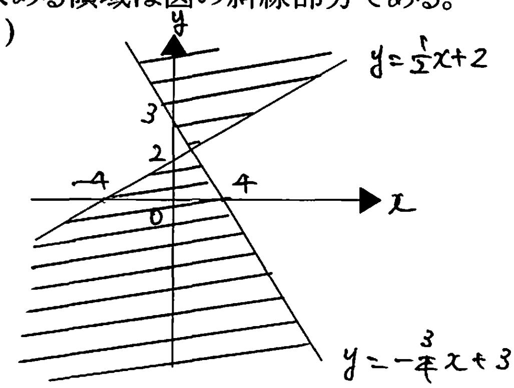


(2)、(3)は境界線を含む。

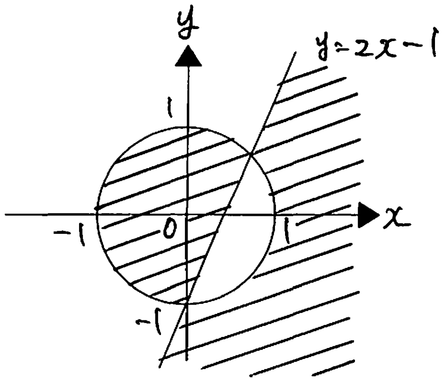
練習問題7.

求める領域は図の斜線部分である。

(1)



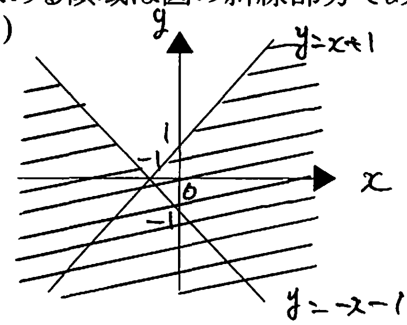
(2)



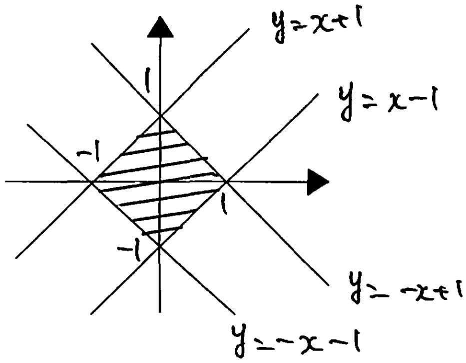
練習問題8.

求める領域は図の斜線部分である。

(1)



(2)



(2)は境界線を含む。

練習問題9.

領域Dは、右の図のように

O(0,0), A(1,0), B(2,1), C(0,2) を頂点とする

四角形の内部および周である。

$2x+y$ を k とおくと、

$2x+y=k$ ・・・①

これを変形すると

$y=-2x+k$

となるから、①は傾きが−2、y 切片が k

の直線を表し、 k の値が増加すれば、

下から上に移動する。

よって、この直線①がDと共有点をもつような k

の値のうち、最大のものと最小のものを求めればよい。

図からもわかるように、 k の値が

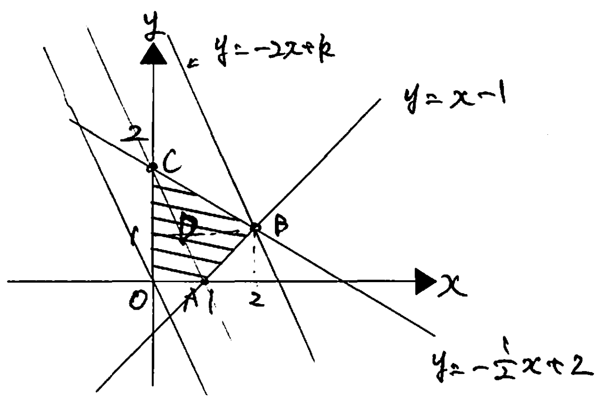
最大になるのは直線①が頂点Cを通るとき、

最小になるのは直線①が原点Oを通るときである。

したがって、①の k 、すなわち $2x+y$ は

$x=2$ $y=1$ のとき、 最大値 5 をとり、

$x=0, y=0$ のとき、 最大値 0 をとる。



数学科教育法 A

教科書作成

7月２０日提出

A

いろいろな数列の和

数列には，これまでに学んだ等差数列，等比数列のほかにも，いろいろなものがある。ここでは，いろいろな数列の和を求める方法を調べよう。

● 数列の和を表す記号Σ

以下では，等差数列や等比数列を含めいろいろな数列の和を考える。そのために便利な記号を導入しよう。

数列$\{a_n\}$において，初項a_1から第n項までの和を，$\sum_{k=1}^{n} a_k$ と書く。$\sum_{i=1}^{n} a_i$のように，kの代わりに別の文字を使ってもよい。kという文字に特別な意味はない。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

注意 Σは，和を表す sum[英] の頭文字Sに相当するギリシャ文字で、シグマと読む。

例1

(1) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+5+ \cdots\cdots (2k-1)$ ⇐ $a_k=2k-1$の場合で，第１項から第４項までの和

(2) $\sum_{k=2}^{10} k^2 = 2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+10^2$ ⇐ $a_k=k^2$で，第２項から第10項までの和

問1 次の式を，Σ記号を使わないで表せ。

(1) $\sum_{k=1}^{n-1}(3k+1)$ (2) $\sum_{k=1}^{4}(k-1)^2$ (3) $\sum_{k=2}^{6} 2^{k-1}$

例2 $1+4+7+\cdots+(3n-2)$ は，第k項が $3k-2$ である数列の初項から第n項までの和であるから，$\sum_{k=1}^{n}(3k-2)$と表せる。

問2 次の数列の和をΣ記号を用いて表せ。

(1) $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+n(n+2)$ (2) $2+2\cdot3+2\cdot3^2+\cdots+2\cdot3^{n-1}$

● Σ記号を用いた計算の基礎

Σ記号で表された式を計算する際，和について次の性質が基本になる。

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

$$ca_1+ca_2+\ldots+ca_n=c(a_1+a_2+\ldots+a_n)$$

これをΣ記号で表すと，次のようになる。

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$$ ただし，c は定数とする。

● Σ記号を用いた計算(1) ― ΣcとΣk

$\sum_{k=1}^{n}c$ は，c＋c＋ ⋯ ＋c のように，n個の c を加え合わせたものであるから

$$\sum_{k=1}^{n}c=nc$$ とくに，$\sum_{k=1}^{n}1=n$

自然数の和は，等差数列の和の公式により次のようにあらわせる。

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

これらを利用して，次のような計算ができる。

例 3

$$\sum_{k=1}^{n}(4k+3)=4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3$$
$$=4\times\frac{1}{2}n(n+1)+3n$$
$$=2n(n+1)+3n$$
$$=n(2n+5)$$

$n\{2(n+1)+3\}$
$=n(2n+5)$

問 3 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$　　(2) $\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)$

● Σ記号を用いた計算(2) ― Σk^2

等式 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ …① は，両辺の k にどんな値を代入しても成り立つ。そこで，この等式①において，k に，順次，1，2，…，n を代入した式を加え合わせると，次の関係式が得られる。

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\}=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1) \qquad \cdots②$$

これは，形の上では，初めの等式の両辺に $\sum_{k=1}^{n}$ をつけたものであり，その内容は次のような n 個の等式の和である。

$$\begin{array}{rrcl}
 & \cancel{2}^3-1^3 & = & 3\cdot1^2+3\cdot1+1 \\
 & \cancel{3}^3-\cancel{2}^3 & = & 3\cdot2^2+3\cdot2+1 \\
 & & \vdots & \\
+) & (n+1)^3-\cancel{n}^3 & = & 3\cdot n^2+3\cdot n+1 \\
\hline
\end{array}$$

②を計算すると，左辺では，2^3，3^3，…，n^3 が打ち消されて，$(n+1)^3-1$ となり，一方，右辺は，次のようになる。

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

ゆえに，②は次のように変形される。

$$(n+1)^3-1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{3}{2}n(n+1)+n$$

$$\begin{aligned}
3\sum_{k=1}^{n}k^2 &= (n+1)^3-1-\frac{3}{2}n(n+1)-n \\
&= (n+1)\{(n+1)^2-\frac{3}{2}n-1\} \\
&= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

これより，次の公式が得られる。

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

問 4　前ページの公式を利用して次の和を求めよ。

(1) $1^2+2^2+\cdots+20^2$　　　(2) $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2$

例 4

$1\cdot4,\ 3\cdot5,\ 5\cdot6,\ 7\cdot7,\ \cdots,\ (2n-1)(n+3),\ \cdots$

という数列の第 k 項は $(2k-1)(k+3)$ であるので，初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(k+3)=\sum_{k=1}^{n}(2k^2+5k-3)$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}3$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-3n$$

$$=\frac{1}{6}n\{2(n+1)(2n+1)+15(n+1)-18n\}$$

$$=\frac{1}{6}n(4n^2+21n-1)$$

問 5　次の数列の和を求めよ。

(1) $1\cdot3,\ 2\cdot4,\ 3\cdot5,\ 4\cdot6,\ \cdots,\ n(n+2)$

(2) $1\cdot1,\ 3\cdot2,\ 5\cdot3,\ 7\cdot4,\ \cdots,\ (2n-1)\cdot n$

(3) $1\cdot2,\ 2\cdot3,\ 3\cdot4,\ 4\cdot5,\ \cdots,\ n(n+1)$

問 6　等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ が任意の k について成り立つことを利用して，次の等式を導け。

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

ただし，$\sum_{k=1}^{n}1=n$，$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$，$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ は，証明せずに公式として用いてよい。

問 7　$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$　を利用して，$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$を求めよ。

● Σ記号を用いた計算(3) — その他

Σ記号の意味に立ち返って $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を考えることがある。

例 5

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ は次のようにして求められる。

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ であるから，

$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

この右辺は，右のように途中の項が

打ち消し合って消えるので，

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$= \frac{n}{n+1}$

$$
\begin{array}{rl}
 & 1 - \cancel{\frac{1}{2}} \\
 & \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \\
 & \vdots \\
 & \cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}} \\
+) & \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \\
\hline
 & 1 - \frac{1}{n+1}
\end{array}
$$

$\boxed{\text{注意}}$　$\frac{1}{k(k+1)}$ を $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ のように書き直すことを **部分分数分解** という。

問 8　次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+2)}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$

(3) $\frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{3}{(3n-2)(3n+1)}$

例 6

次の数列の和を求めよ。

1，1＋2，1＋2＋4，…，1＋2＋4＋…＋2^{n-1}

この数列の第 k 項は，初項 1，公比 2，項数 k の等比数列の和であるから，その値は，

$$\frac{1\cdot(2^k-1)}{2-1}=2^k-1$$

よって，　$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1$

$$=\frac{2(2^k-1)}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$$

問 9　数列 1，1＋3，1＋3＋9，…，1＋3＋9＋…＋3^{n-1}の和を求めよ。

例 7

$S_n=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots+10\cdot2^9$

考え方として，一般項が $n\cdot2^{n-1}$ で表される数列の和なので等比数列和の公式を導いたのと同様に，S_n と $2S_n$ の差を計算する。

$S_n=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots+10\cdot2^9$

$2S_n=\qquad 1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+9\cdot2^9+10\cdot2^{10}$

の辺々をひくと，　　$(2-1)2=2$

$-S_n=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^9-10\cdot2^{10}$　　$(3-1)2^2=2^2$ など

$$=\frac{(2^n-1)}{2-1}-10\cdot2^{10}$$

したがって$S_n=9\cdot2^{10}+1=9\times1024+1=9217$

問 10　次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)2^{k-1}$　　(2) $\sum_{k=1}^{n}k\cdot3^{k-1}$

階差数列とその応用

数列$\{a_n\}$の隣り合う２項の差をとって順に並べると，別の数列が得られる。

この数列の一般項から，数列$\{a_n\}$の一般項が求められることがある。

● 階差数列

右の図のように，自然数を正方形状に並べていく。

1	4	9	16	25
2	3	8	15	24
5	6	7	14	23
10	11	12	13	22
17	18	19	20	21

このとき，対角線上に並ぶ数を順に並べた数列

1，3，7，13，21，　……　①

を例に一般項を求める方法を考えよう。

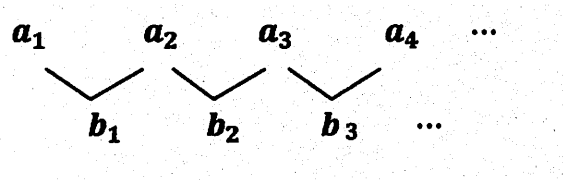
この数列の隣り合う２項の差を順に並べると，

次のような数列が得られる。

2，4，6，8，……　②

一般に，数列$\{a_n\}$の隣り合う

２項の差



$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

$$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を項とする数列$\{b_n\}$を，数列$\{a_n\}$の **階差数列** という。

数列①を$\{a_n\}$，数列②を$\{b_n\}$は数列$\{a_n\}$の階差数列であり，第n項は

$b_n = 2n$ であると考えられる。

このとき，数列$\{a_n\}$の第６項は，次のようにして求められる。

$b_5 = a_6 - a_5$ $(n = 5)$ から　　$a_6 = a_5 + b_5 = 21 + 10 = 31$

問 11　階差数列を考えて，次の数列の第６項，第７項を求めよ。

(1)　1，2，5，10，17，…　　(2)2，3，5，9，17，…

● 階差数列の応用

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$a_2 - a_1 = b_1$$
$$a_3 - a_2 = b_2$$
$$a_4 - a_3 = b_3$$
$$\vdots$$
$$a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$$

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2} - a_1 = b_1 \\ & \cancel{a_3} - \cancel{a_2} = b_2 \\ & \cancel{a_4} - \cancel{a_3} = b_3 \\ & \vdots \\ +) & a_n - \cancel{a_{n-1}} = b_{n-1} \\ \hline & a_n - a_1 = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} \end{array}$$

となり，$n \geq 2$ のとき

$$a_n - a_1 = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

以上から，次のことがいえる。

> 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると
>
> $b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
>
> $n \geq 2$ のとき $\quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

例 8

次の数列の一般項 a_n を求めよ。

1，3，7，13，21，…

この数列の階差数列は　2，4，6，8，…

その一般項を b_n とすると，$b_n = 2n$ である。

よって，$n \geq 2$ のとき

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2 \times \frac{1}{2}(n-1)n$

すなわち　$a_n = n^2 - n + 1$

初項 $a_1 = 1$ なので，上の a_n は $n = 1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項 a_n は　$a_n = n^2 - n + 1$

問 12 次の数列の一般項を求めよ。

(1) $-2,\ -3,\ -2,\ 1,\ 6,\ \cdots$　　(2) $1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 41,\ \cdots$

● 数列の和とその階差

数列$\{a_n\}$において，初項a_1から第n項a_nまでの和S_nがnの式で与えられているときに，一般項a_nを求める方法を考えよう。

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

において　$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$

であるから，両辺引くと，

$n \geq 2$のとき　$S_n - S_{n-1} = a_n$　　$S_1 = a_1$

がいえる。したがって，次のことが成り立つ。

> 数列$\{a_n\}$の初項a_1から第n項a_nまでの和をS_nとすると
>
> $n \geq 2$のとき　$S_n - S_{n-1} = a_n$
>
> 初項a_1は　$S_1 = a_1$

例 9 初項から第nまでの和S_nが，$S_n = n^2$で表される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$n \geq 2$のとき

$S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$

初項は　$a_1 = S_1 = 1^2 = 1$

よって，$a_n = 2n - 1$は$n = 1$のときにも成り立つ。

したがって，一般項は$a_n = 2n - 1$

問 13 初項から第nまでの和S_nが，次の式で表されている数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ

(1) $S_n = 2n^2 - 3n$　　(2) $S_n = 3^n - 1$　　(3) $S_n = n^2 + 2n + 2$

[編集方針と構成の説明]

いろいろな数列という範囲で基礎計算から様々な応用問題の基礎となる部分を取り入れ，問にできる限りのパターンを載せた。内容としてはできるだけ前の範囲と繋がるように等差数列や等比数列などを使った計算も含めるように構成した。次のページには章末問題を予定しており，そこでこれまでの内容を理解した上での少し発展問題をやるつもりだったが，課題の制限により前のページで止めておいた。

[問の解説と解答]

問いのほとんどは一つ前の例題や説明，公式などを理解できていれば自力で解けるように構成してある。

問1　(1) $4+7+10+\cdots+3n-2$　　(2) $0+1+4+9$

(3) $2+4+8+16+32$

問2　(1) $\sum_{k=1}^{n} k(k+2)$　　(2) $2\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}$

問3　(1) $n(n+2)$　　(2) $\frac{1}{2}(n-1)(3n-4)$

問4　(1) 2870　　(2) $\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$

問5　(1) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$　　(2) $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

(3) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

問6　省略

問7　$\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

問8　(1) $\frac{3n^2+n-1}{4n(n+1)}$　　(2) $\frac{2n}{2n+1}$　　(3) $\frac{3n}{3n+1}$

問9　(1) $\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$

問10　(1) $S_n=3-2^n(2n+1)$　　(2) $S_n=\frac{1}{4}-\frac{3^n}{2}(\frac{1}{2}-n)$

問11　(1) 26，37　　(2) 33，65

問12　(1) $a_n=n^2-4n+1$　　(2) $a_n=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

問 13　(1) $a_n = 4n - 5$　　(2) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

(3) $a_n = \begin{cases} 5 & (n = 1) \\ 2n + 1 & (n \geq 2) \end{cases}$

数学科教育法Ａ
教科書作成レポート

編集方針や構成の説明・解説

わたしは教育実習で平方根の範囲を実際に中学生に教えた。子どもたちが「どうして，こんな計算する必要があるか分からない」とか、「教科書に書いてある意味がわからない」と言っていた。わたしも教科書の説明では不十分だと感じた部分があったので，今回この範囲で教科書を作成しようと考えた。

構成

1　平方根

　1　平方根

　●平方根の大小●

　2　平方根の値

　3　根号をふくむ式の計算

　●乗法・除法●

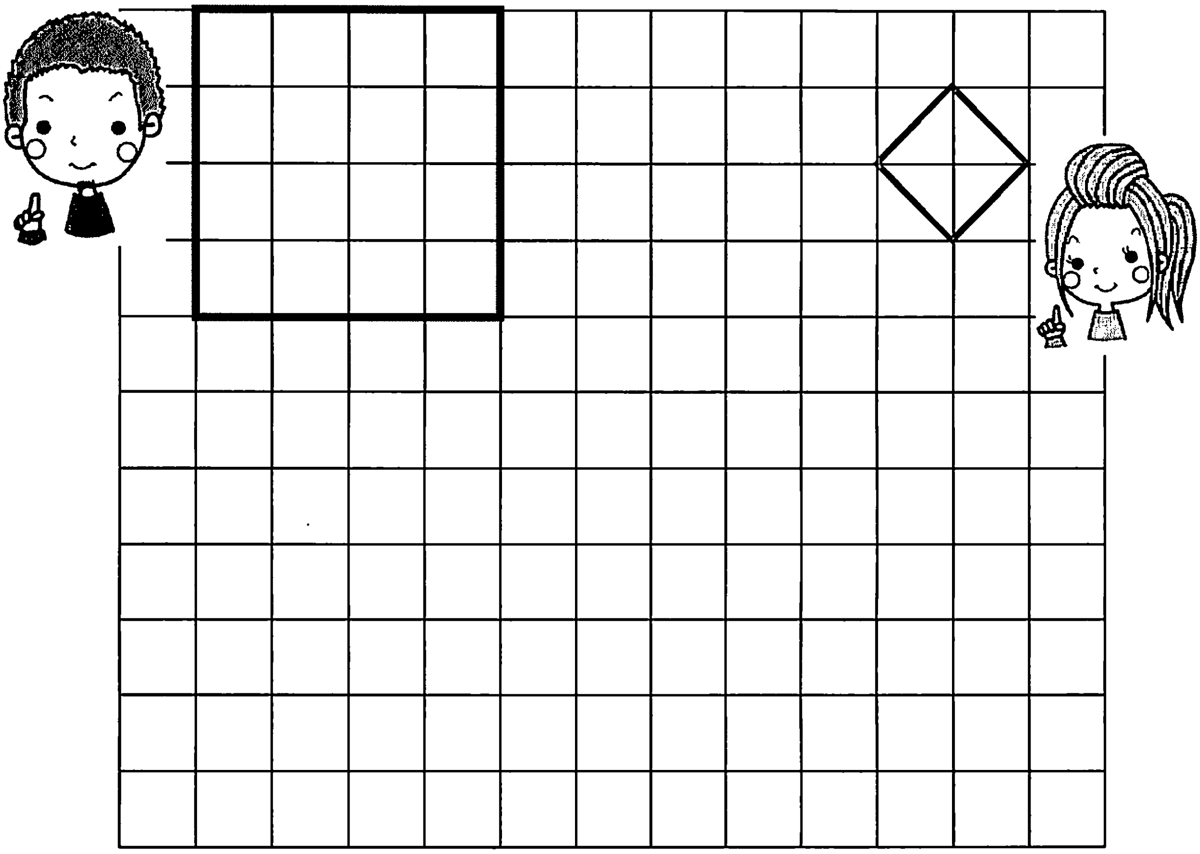
　●有理化●　　　　　　　　←今回のレポートではここまで

　●和と差●

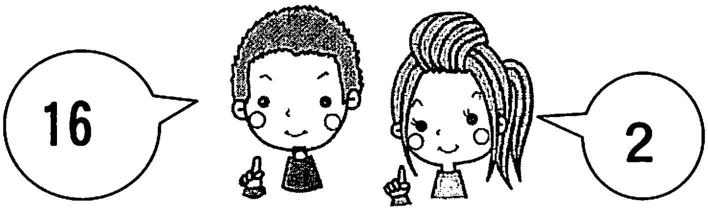
はじめて平方根という概念を学ぶため，まず平方根という数のイメージをつかんでもらうために既習の図形を使って考えるという導入とした。$\sqrt{\ }$の付いているというイメージのつかみにくい数の大きさについては，およその数を求めたり，図形を使って考えさせるようにした。また，電卓を使うなどもした。覚えてほしいおよその数は語呂合わせで暗記させたり，計算をするにあたって忘れてはいけないことはルールとして載せることで忘れないように考慮した。既習事項の復習やその計算の方法や意味は吹き出しにして，子どもたちの感じるであろう疑問を解決するようにした。

1　平方根

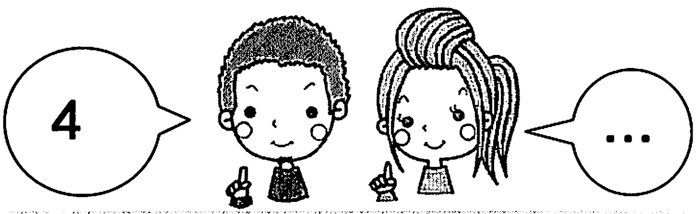
☆いろいろな正方形を書いてみよう！



上で書いた正方形の面積は，いくらになったかな？



では，1辺の長さは？



2乗するとaになる数を調べていきましょう。

1 平方根

$●^2 = 16$

☆考えよう

2乗すると 16 になる数をいいましょう。また，2乗すると$\frac{4}{9}$にな数をいいましょう。

$4^2 = 16$

$(-4)^2 = 16$

2乗して 16 になるのは4と-4です。
まとめると± 4と表せます。

> 2乗するとaになる数を，aの**平方根**（へいほうこん）といいます。

aの平方根は，$x^2 = a$にあてはなるxの値のことです。
16 の平方根は± 4です。

2乗

$\pm 4 \rightleftarrows 16$

平方根

例1　いろいろな数の平方根

25 の平方根は± 5

$\frac{4}{9}$の平方根は$\pm \frac{2}{3}$

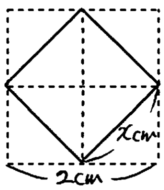
問1　次の平方根をいいなさい。

(1) 36　(2) $\frac{16}{49}$　(3) 0.01

※正の数aの平方根は，正の数と負の数の2つあって，その絶対値は等しくなる。

☆考えよう

右の図のような正方形の面積を求めましょう。
また，この正方形の1辺の長さを$x$cm とするとxはどんな数になるでしょうか。



上の図の正方形の面積は2cm^2となるので，

$x^2 = 2$

が成り立ちます。これより，xは2の平方根のうち正の数の方だということになります。

正方形の面積の公式は

(正方形の面積)＝(一辺)^2

しかし，2の平方根は整数や分数などの有理数では表すことができません。

そこで，このような数を記号$\sqrt{\ }$を使って表します。記号$\sqrt{\ }$を**根号**(こんごう)といい，**ルート**と読みます。

よって，面積が2cm^2の正方形の一辺の長さは$\sqrt{2}$cmです。

一般に正の数aの平方根は，正の方を$\sqrt{a}$，負の方を$-\sqrt{a}$と表し，**ルートa**，**マイナスルートa**と読みます。

2乗
$\pm\sqrt{a} \rightleftarrows a$
平方根

例2　$\sqrt{\ }$を使って平方根を表す
3の平方根は$\sqrt{3}$と$-\sqrt{3}$であり，まとめると$\pm\sqrt{3}$である。

問2　次の数の平方根を，$\sqrt{\ }$を使って表しなさい。
(1) 5　(2) 0.7　(3) $\frac{3}{5}$

問3　$(\sqrt{5})^2$の値をいいなさい。また$(-\sqrt{5})^2$の値をいいなさい。

根号を使って表された数の中には，根号を使わなくても表せる数があります。

例3　$\sqrt{a^2}$
$\sqrt{16} = 4$，　$-\sqrt{16} = -4$，
$\sqrt{0.01} = 0.1$，$-\sqrt{0.01} = -0.1$

問4　次の数を，ルートを使わないで表しなさい。
(1) $\sqrt{25}$　(2) $-\sqrt{49}$　(3) $\sqrt{0.09}$　(4) $\sqrt{\frac{4}{9}}$

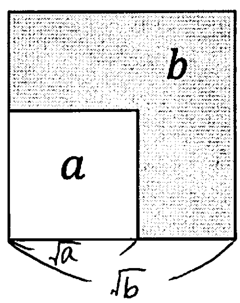
ルール①：根号を使わなくて表せる数は根号を使わないで表す。

※$x^2 = 0$となるxは0だけなので，0の平方根は0です。　また，2乗して負になる数はないので$\sqrt{-a}$のような負の数の平方根は考えません。

(正の数)^2 = 正の数
(負の数)^2 = 正の数

●平方根の大小●

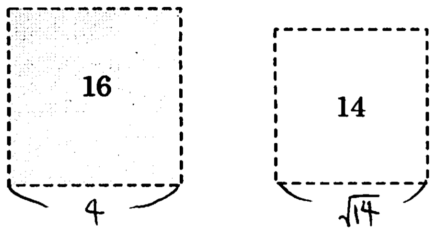
正方形では，面積が大きくなれば一辺の長さも大きくなり，一辺の長さが大きくなれば面積も大きくなります。右の図のように面積がa，bの正方形と一辺の長さを考えると，次のような性質がわかります。



正の数a，bについて，$a < b$ならば$\sqrt{a} < \sqrt{b}$

例５　平方根の大小

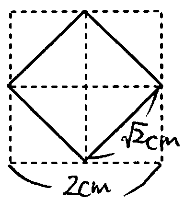
(1) $\sqrt{2}$と$\sqrt{3}$
$2<3$だから$\sqrt{2}<\sqrt{3}$
(2) 4と$\sqrt{14}$
$4=\sqrt{16}$より，
$16>14$だから$4>\sqrt{14}$



問５　次の各組の数の大小を，不等号を使って表しなさい。 (1) 3，$\sqrt{5}$
(2) $\sqrt{0.7}$，0.7　(3) $-\sqrt{7}$，$-\sqrt{6}$

2 平方根の値

★やってみよう
右の面積が$2\mathrm{cm}^2$の正方形の図の一辺の長さを定規で測って，$\sqrt{2}$の大きさを求めましょう。



$\sqrt{2}$は，およそ$\boxed{\quad}$ ですが，この$\sqrt{2}$の大きさについて，もっと詳しく調べてみましょう。

$1.4^2=1.96$，$(\sqrt{2})^2=2$，$1.5^2=2.25$で，
$1.96<2<2.25$なので，
$1.4<\sqrt{2}<1.5$となります。したがって，$\sqrt{2}$を小数で表したとき，その小数第１位の数は４です。

問１　**$\sqrt{2}$を小数で表した時の小数第２位の数を求めましょう。(□にあてはまる数を書きましょう。)**

$1.41^2=\boxed{\qquad\qquad}$ $1.42^2=\boxed{\qquad\qquad}$

$1.43^2=\boxed{\qquad\qquad}$

この計算結果から$\boxed{\qquad\qquad}<\sqrt{2}<\boxed{\qquad\qquad}$

したがって，$\sqrt{2}$の小数第２位の数は，$\boxed{\quad}$である。

　このようにして，さらにけた数の多い小数の２乗と２を比べることをくり返していくと，$\sqrt{2}$に限りなく近い値を求めることができます。

$\sqrt{\ }$を使った数の詳しい値は次のようになります。またその覚え方を語呂合わせで覚えましょう。

$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488\cdots$
（一夜一夜に人見頃）
$\sqrt{3} = 1.7320508075688772935\cdots$
（人並におごれや）
$\sqrt{5} = 2.2360679774997896964\cdots$
（富士山ろくおうむ鳴く）
$\sqrt{6} = 2.4494897427831780981\cdots$
（二夜しくしく）

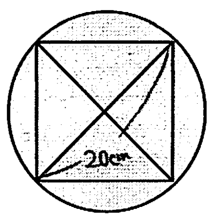
実際に問題を解く場合には，
$\sqrt{2} = 1.414$,　　$\sqrt{3} = 1.732$
のように，およその値を使います。

例１　電卓を使っておよその値をもとめる
$\sqrt{7}$の小数第３位までの値を求めるには，電卓の７，$\sqrt{\ }$の順にボタンを押し，得られた値の小数第４位を四捨五入する。
$\sqrt{7} = 2.646$

問２　電卓を使って，次の数のおよその値を小数第３位まで求めなさい。
(1) $\sqrt{8}$　(2) $\sqrt{26}$　(3) $\sqrt{56.4}$　　　逆もやらせてみよ.

問３　面積が$20m^2$で，正方形の花だんを作るには，一辺の長さをどれだけにすればよいでしょうか。cm の位まで求めなさい。

問４　直径 20cm の丸太から，切り口ができるだけ大きな正方形になるように角材をとろうと思います。切り口の正方形の一辺の長さは，どれだけになりますか。mm の位まで求めなさい。



3　根号をふくむ式の計算

●乗法・除法●

☆考えよう

次の２つの式の値をくらべてみましょう。

$\sqrt{2}\times\sqrt{3},\quad \sqrt{2\times 3}$

$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$と$\sqrt{2\times 3}$が等しいかどうか，調べてみましょう。
まず$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$を２乗してみると，

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}\times\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2}\times\sqrt{3})\times(\sqrt{2}\times\sqrt{3})\\ &= \sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\\ &= (\sqrt{2})^2\times(\sqrt{3})^2\\ &= 2\times 3\\ &= 6\end{aligned}$$

次に$\sqrt{2\times 3}$を２乗すると，

$$\begin{aligned}(\sqrt{2\times 3})^2 &= (\sqrt{6})^2\\ &= 6\end{aligned}$$

したがって，次の式が成り立ちます。

$$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times 3}$$

また$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$と$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$についても同じように調べてみると，

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2}=\frac{2}{3}$$

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=\frac{2}{3}$$

となるので，次の式が成り立ちます。

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

正の数a, bについて，

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b},\qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

例1　$\sqrt{\ }$のついた数の積と商

$$\sqrt{32}\times\sqrt{2}=\sqrt{32\times2}$$
$$=\sqrt{64}$$
$$=8$$

$$\sqrt{8}\div\sqrt{6}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$$
$$=\sqrt{\frac{8}{6}}$$
$$=\sqrt{\frac{4}{3}}$$

問1　次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{4}\times\sqrt{5}$　(2) $\sqrt{40}\times\sqrt{10}$　(3) $(-\sqrt{5})\times\sqrt{7}$

(4) $\sqrt{39}\div\sqrt{3}$　(5) $\sqrt{54}\div\sqrt{6}$　(6) $\sqrt{14}\div(-\sqrt{16})$

$3\times\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\times3$のような積は×を省いて，$3\sqrt{2}$と書きます。
このような数は

$$3\sqrt{2}=3\times\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{9}\times\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{9\times2}$$
$$=\sqrt{18}$$

文字式と同じように，数字が前です。
$a\times3=3a$

のように，$\sqrt{a}$の形に変形することができます。

例2　$\sqrt{a}$ の形にする

$$2\sqrt{3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}$$
$$=\sqrt{4\times3}$$
$$=\sqrt{12}$$

$$\frac{\sqrt{45}}{3}=\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{9}}$$
$$=\sqrt{\frac{45}{9}}$$
$$=\sqrt{5}$$

問2　次の数を変形して，$\sqrt{a}$の形にしなさい。

(1) $5\sqrt{5}$　(2) $4\sqrt{2}$　(3) $\frac{\sqrt{20}}{2}$

このような変形とは逆に，

$$\sqrt{18}=\sqrt{9\times2}$$
$$=\sqrt{9}\times\sqrt{2}$$
$$=3\sqrt{2}$$

$\sqrt{\ }$の中の数をできるだけ大きな平方数と分解します。

のように，$a\sqrt{b}$の形に変形して，$\sqrt{\ }$の中を簡単な数にできる場合があります。

例3　$\sqrt{\ }$の中を簡単な数にする

$$\sqrt{75}=\sqrt{25\times3}$$
$$=\sqrt{25}\times\sqrt{3}$$
$$=5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}}$$
$$=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

問３　次の数を有理化しなさい。

(1) $\sqrt{20}$　　(2) $\sqrt{300}$　　(3) $\sqrt{\dfrac{5}{49}}$

$\sqrt{\ }$の中の数が大きく，平方数を簡単に見つけられない場合は素因数分解を使いましょう。

例４　素因数分解を使って

$252 = 2\times2\times3\times3\times7$だから，

$$\begin{aligned}\sqrt{252} &= \sqrt{2\times2\times3\times3\times7}\\ &= \sqrt{2^2\times3^2\times7}\\ &= \sqrt{2^2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{7}\\ &= 2\times3\times\sqrt{7}\\ &= 6\sqrt{7}\end{aligned}$$

2)<u>252</u>
2)<u>126</u>
3)<u>63</u>
3)<u>21</u>
7

問４　次の数を変形して，$\sqrt{\ }$の中を簡単にしなさい。

(1) $\sqrt{432}$　　(2) $\sqrt{588}$

ルール②：$\sqrt{\ }$の中を簡単にできる数は簡単にする。

例５　$\sqrt{\ }$の中を簡単な数にすることを使って

$$\begin{aligned}&\sqrt{75}\times\sqrt{18}\\ &= 5\sqrt{3}\times3\sqrt{2}\\ &= 5\times3\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\\ &= 15\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sqrt{14}\times\sqrt{6}\\ &= \sqrt{2\times7}\times\sqrt{2\times3}\\ &= \sqrt{2\times7\times2\times3}\\ &= \sqrt{2^2\times7\times3}\\ &= 2\sqrt{21}\end{aligned}$$

問５　例５のようにして，次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{18}\times\sqrt{12}$　　(2) $\sqrt{6}\times\sqrt{10}$

(3) $4\sqrt{2}\times2\sqrt{6}$　　(4) $\sqrt{45}\times\sqrt{28}$

●有理化●

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$のような分母に$\sqrt{\ }$をふくむ数は，

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

分数は分母，分子の両方に同じ数をかけても数の大きさは変わらない性質があります。

というように，分母と分子に同じ数をかけて，分母に$\sqrt{\ }$をふくまない形にかえ

ることができます。

> このような変形を**有理化**といいます。

例 6　有理化する

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4}$$

有理数÷無理数では計算を進めることができません。

例えば，$\frac{1}{\sqrt{2}}$について考えると，

$$1.414\cdots \overline{)\,1.0\,}\quad (0.7\cdots)$$
?

問 6　次の数を有理化しなさい。

(1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$　(2) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$　(3) $\frac{6}{\sqrt{18}}$

> ルール③：有理化できる数は有理化する。

これまでのルール①②③を使って，$\sqrt{\ }$をふくむ式のおよその値を求めましょう。

例題 1　$\sqrt{3} = 1.732$として，次の値を求めなさい。

(1) $\sqrt{75}$　(2) $\frac{9}{\sqrt{3}}$

> (1) $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$
> $= 5 \times 1.732$
> $= 8.66$
>
> (2) $\frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$
> $= \frac{9\sqrt{3}}{3}$
> $= 3\sqrt{3}$
> $= 3 \times 1.732$
> $= 5.196$

問 7　$\sqrt{5} = 2.236$として，次の値を求めなさい。

(1) $\sqrt{45}$　(2) $\frac{5}{2\sqrt{5}}$

解答

1

問１　(1) ± 6　(2) $\pm\frac{4}{7}$　(3) ± 0.1

問２　(1) $\pm\sqrt{5}$　(2) $\pm\sqrt{0.7}$　(3) $\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$

問３　5

問４　(1) 5　(2) -7　(3) 0.3　(4) $\frac{2}{3}$

問５　(1) $3 > \sqrt{5}$　(2) $\sqrt{0.7} < 0.7$　(3) $-\sqrt{7} < -\sqrt{6}$

2

問１　1.9881，2.0164，2.0449，1.9881，2.0164，1

問２　(1) 2.828　(2) 5.099　(3) 7.510

問３　$\sqrt{20} = 5.572135954\cdots$ 答 4.47m，4m47cm，447cm のいずれか

問４　ひし形の公式をつかうと，正方形の面積は 10×20=200

一辺の長さは$\sqrt{200} = 14.14213562\cdots$ 答　14.1cm，14cm1mm，141mm のいずれか

3

問１　(1) $\sqrt{4} \times \sqrt{5} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{20}$　(2) $\sqrt{40} \times \sqrt{10} = \sqrt{400} = 20$

(3) $\left(-\sqrt{5}\right) \times \sqrt{7} = -\sqrt{5 \times 7} = -\sqrt{35}$　(4) $\sqrt{39} \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{39}{3}} = \sqrt{13}$

(5) $\sqrt{54} \div \sqrt{6} = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{54}{6}} = \sqrt{9} = 3$　(6) $\sqrt{14} \div \left(-\sqrt{16}\right) = -\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{16}} = -\sqrt{\frac{14}{16}} = -\sqrt{\frac{7}{8}}$

問２　(1) $5\sqrt{5} = \sqrt{25} \times \sqrt{5} = \sqrt{25 \times 5} = \sqrt{125}$　(2) $4\sqrt{2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{32}$　(3) $\frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{20}{4}} = \sqrt{5}$

問３　(1) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$　(2) $\sqrt{300} = \sqrt{100} \times \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{\frac{5}{49}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{5}}{7}$

問４　(1) $\sqrt{432} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 3^2 \times 3} = 2 \times 2 \times 3 \times \sqrt{3} = 12\sqrt{3}$　(2) $\sqrt{588} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7} = \sqrt{2^2 \times 3 \times 7^2} = 2 \times 7 \times \sqrt{3} = 14\sqrt{3}$

問５　(1) $\sqrt{18} \times \sqrt{12} = 2\sqrt{5} \times 3\sqrt{2} = 2 \times 3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{10}$　(2) $\sqrt{6} \times \sqrt{10} = \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{2^2 \times 3 \times 5} = 2\sqrt{15}$　(3) $4\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 4 \times 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2 \times 3} = 8 \times \sqrt{2^2 \times 3} = 8 \times 2 \times \sqrt{3} = 16\sqrt{3}$　(4) $\sqrt{45} \times \sqrt{28} = \sqrt{9 \times 5} \times \sqrt{4 \times 7} = 3 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{7}$

問６　(1) $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$　(2) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$　(3) $\frac{6}{\sqrt{18}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

問７　(1) $\sqrt{45} = 3\sqrt{5} = 3 \times 2.236 = 6.708$　(2) $\frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.118$