授業コード：72370-001, 73307-001	参照物：ノート，教科書	回収：解答用紙のみ

応用解析中間試験'15.11/12

１．複素数 $\alpha=-2-2\sqrt{3}\,i$ を極形式で表し，方程式 $z^4=\alpha$ の4つの解 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ の極形式を求めよ．また， $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ を複素平面上に図示せよ．（１０点）

２． z 平面の中心 $3+4i$ 半径5の円が， $w=f(z)=\dfrac{1}{z}$ により w 平面に写される図形を図示せよ．

（１０点）

３． z 平面の扇型領域 $F:1\le|z|\le 3,\ \dfrac{1}{3}\pi\le\arg z\le\dfrac{2}{3}\pi$ を図示せよ．また， F が $w=f(z)=\mathrm{Log}\,z$ により w 平面に写される図形 R を図示せよ． Log は対数関数の主値である． （２０点）

４．次の z の値を求めよ．

(1) $z=\cos\left(i-\dfrac{\pi}{2}\right)$ （１０点）　(2) $z=\tan^{-1}(2+i)$ （１０点）

５．次の関数 $f(z)$ が正則かどうかをコーシー・リーマンの関係式により判定せよ．

(1) $f(z)=z-\sin z$ （１０点）　(2) $f(z)=|z|+i\,\mathrm{Re}\,z$ （１０点）

６．関数 $u(x,y)=e^x\sin y$ が調和関数であることを示し，その共役調和関数を求めよ．

（２０点）

応用解析中間試験'15.11/12解答

１．(10点) $\alpha = 4e^{4\pi i/3}$,

$$\beta_1 = \sqrt{2}e^{\pi i/3}, \beta_2 = \sqrt{2}e^{5\pi i/6}, \beta_3 = \sqrt{2}e^{4\pi i/3}, \beta_4 = \sqrt{2}e^{11\pi i/6}.$$

座標，記号のない図は不可(図1).

２．(10点) $z = x + iy$ 平面の円：$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$．整理して，$(x^2 + y^2) - 6x - 8y = 0$．対応する $w = u + iv$ の図形の方程式は，$1 - 6u + 8v + 0(u^2 + v^2) = 0$．すなわち，直線：$6u - 8v = 1$

座標，記号のない図は不可(図2).

図1．z=x+iy平面

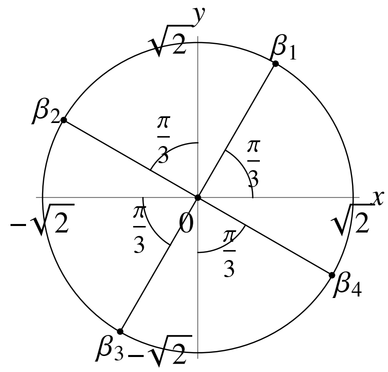
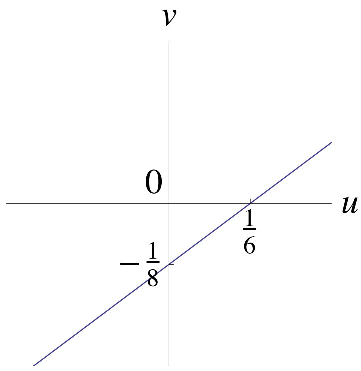


図2．w=u+iv平面



３．(20点) 扇形 F は図3の網掛部分，境界を含む.

$w = \mathrm{Log}\, z = \underbrace{\log|z|}_{\mathrm{Re}\,w} + i\,\underbrace{\mathrm{Arg}\,z}_{\mathrm{Im}\,w}$ より，$R: 0 = \log 1 \le \mathrm{Re}\,w \le \log 3,\ \frac{1}{3}\pi \le \mathrm{Im}\,w \le \frac{2}{3}\pi$ …①となる.

R は図4の網掛部分の長方形．境界を含む.

座標，記号のない図は不可．領域表示①のない答案は不可.

図3. z=x+iy平面

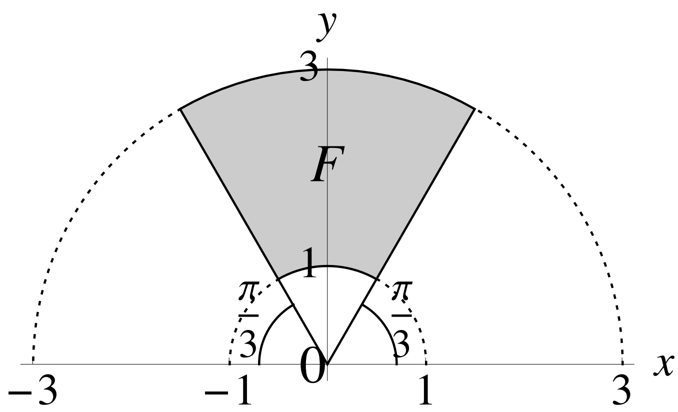
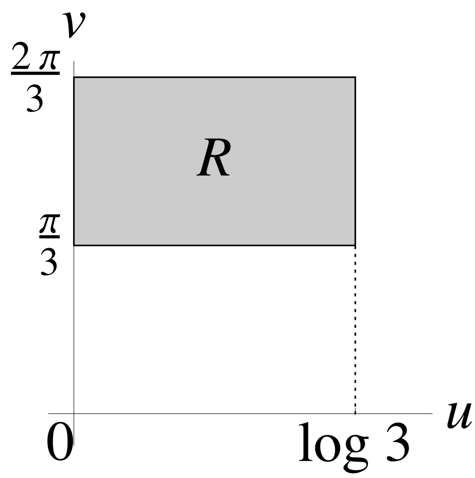


図4. w=u+iv平面



４．(1)(10点) $z=\cos\left(i-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin i=\sin 0\cosh 1+i\cos 0\sinh 1=i\sinh 1=i\dfrac{e-e^{-1}}{2}$ ．

(2)(10点) $z=\tan^{-1}(2+i)$ の値の一つは

$$\alpha=-\frac{i}{2}\log\left(\frac{i-(2+i)}{i+(2+i)}\right)=-\frac{i}{2}\log\left(\frac{-1}{1+i}\right)=-\frac{i}{2}\log\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=-\frac{i}{2}\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3\pi}{4}i\right)=\frac{3\pi}{8}+\frac{i}{4}\log 2.$$

tangentの周期性より， $z=\alpha+n\pi=\dfrac{i}{4}\log 2+\left(n+\dfrac{3}{8}\right)\pi$ （n は任意の整数）．

５．(1)(10点) $f(z)=z-\sin z=\underbrace{x-\sin x\cosh y}_{u(x,y)}+i\,(\underbrace{y-\cos x\sinh y}_{v(x,y)})$ より，

$u_x=1-\cos x\cosh y=v_y, v_x=\sin x\sinh y=-u_y$ ． $f(z)$ はC.R.を満たすゆえ正則.

(2)(10点) $f(z)=|x+iy|+ix=\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{u(x,y)}+i\underbrace{x}_{v(x,y)}$ より，

$v_x=1\neq\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-u_y$ ． $f(z)$ はC.R.を満たさないので非正則.

６．(20点) $u_x=e^x\sin y, u_{xx}=e^x\sin y, u_y=e^x\cos y, u_{yy}=-e^x\sin y$ ．ゆえに $u_{xx}+u_{yy}=0$ が成立し， u は調和.

C-Rより， $v_x=-u_y=-e^x\cos y\cdots$①， $v_y=u_x=e^x\sin y\cdots$②.

①を x で積分して， $v=-\int e^x\cos y\,dx=-e^x\cos y+p(y)$ ． …③

③を y で微分した $v_y=e^x\sin y+p'(y)$ と②を比較して， $p'(y)=0$. $\therefore p(y)=c$ ．これを③に代入して，

$$v(x,y)=-e^x\cos y+c \qquad (c \text{ は任意定数}).$$