授業コード：72370-001, 73307-001	参照物：ノート，教科書	回収：解答用紙のみ

応用解析中間試験'14.11.11

１．複素数 $\alpha=-1$ を極形式で表し，方程式 $z^4=\alpha$ の4つの解 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ の極形式を求めよ．また， $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ を複素平面上に図示せよ．（10点）

２． z 平面の $z_1=\dfrac{1}{3}, z_2=1, z_3=\dfrac{1}{5}(2-i)$ を通る円が， $w=f(z)=\dfrac{1}{z}$ により w 平面に写される図形を図示せよ．　（10点）

３． z 平面の長方形領域 $R: 0\le \mathrm{Re}\,z \le \log 2,\ 0\le \mathrm{Im}\,z\le \pi$ を図示せよ．また， R が $w=f(z)=e^z$ により w 平面に写される図形 F を図示せよ．（２０点）

４．次の z の値を求めよ．

(1) $z=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+i\log 2\right)$ （１０点）　(2) $z=\cos^{-1}\dfrac{5}{3}$ （１０点）

５．次の関数 $f(z)$ が正則かどうかをコーシー・リーマンの関係式により判定せよ．

(1) $f(z)=e^{2z}$ （１０点）　(2) $f(z)=\mathrm{Im}\,z$ （１０点）

６．関数 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ が調和関数であることを示し，その共役調和関数を求めよ．

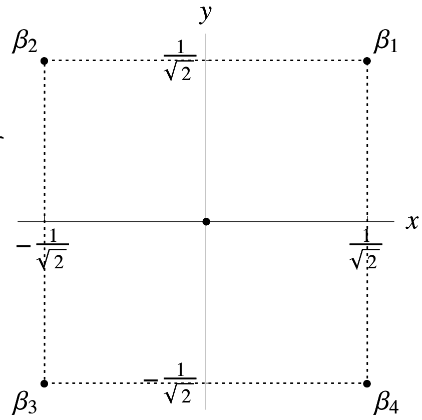
（20点）

応用解析中間試験'14.11.11解答

1．(10点) $\alpha = e^{\pi i}, \beta_1 = e^{\pi i/4}, \beta_2 = e^{3\pi i/4}, \beta_3 = e^{5\pi i/4}, \beta_4 = e^{7\pi i/4}$．

座標，記号のない図は不可(図１).

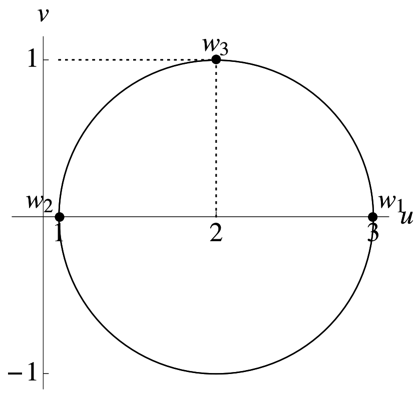
図1．　z=x+iy平面



2．(10点) 3点 $w_1 = \dfrac{1}{z_1} = 3, w_2 = \dfrac{1}{z_2} = 1, w_3 = \dfrac{1}{z_3} = 2 + i$ を通る円．すなわち，中心２半径１の円.

座標，記号のない図は不可(図2).

図2．　w=u+iv平面



3．(20点) R は長方形．図3，境界を含む.

$F: 1 = e^0 \le |w| \le e^{\log 2} = 2,\ 0 \le \arg w \le \pi$ は扇形．図4，境界を含む.

座標，記号のない図は不可.

図3．　z=x+iy平面

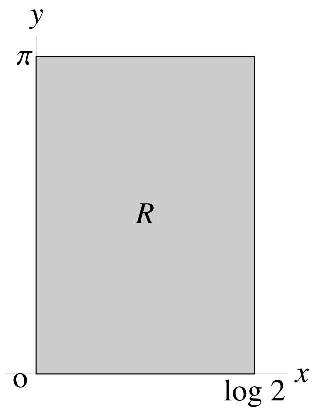
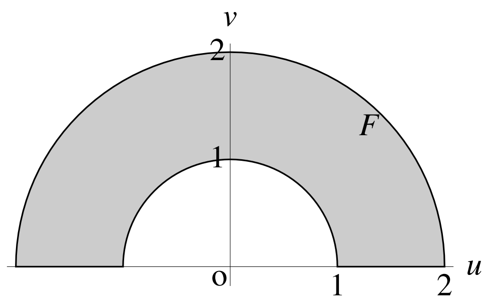


図4．　w=u+iv平面



4．(1)(10点) $z = \sin\dfrac{\pi}{2}\cosh(\log 2) + i\cos\dfrac{\pi}{2}\sinh(\log 2) = \cosh(\log 2) = \dfrac{e^{\log 2} + e^{-\log 2}}{2} = \dfrac{2 + 1/2}{2} = \dfrac{5}{4}$．

(2)(10点) $\cos^{-1}\dfrac{5}{3}$ の値の一つは

$$z_0 = \cos^{-1}\frac{5}{3} = -i\log\left(\frac{5}{3} + \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1}\right) = -i\log\left(\frac{5}{3} + \frac{4}{3}\right) = -i\log 3$$

cosineの周期性と対称性より， $z = \pm i\log 3 + 2n\pi$ （n は任意の整数）.

5．(1)(10点) $f(z) = f(x,y) = \underbrace{e^{2x}\cos 2y}_{u(x,y)} + i\underbrace{e^{2x}\sin 2y}_{v(x,y)}$ より，

$u_x = 2e^{2x}\cos 2y = v_y, v_x = 2e^{2x}\sin 2y = -u_y$．$f(z)$ はC.R.を満たすゆえ正則.

(2)(10点) $f(z) = \mathrm{Im}\{x + iy\} = y = \underbrace{y}_{u(x,y)} + i\underbrace{0}_{v(x,y)}$ より，

$v_x = 0 \ne -1 = -u_y$．$f(z)$ はC.R.を満たさないので非正則.

６．(20点) $u_x = 3x^2 - 3y^2, u_{xx} = 6x, u_y = -6xy, u_{yy} = -6x$．ゆえに $u_{xx} + u_{yy} = 0$ が成立し， u は調和.

C-Rより， $v_x = -u_y = 6xy$ …①， $v_y = u_x = 3x^2 - 3y^2$ …②.

①を x で積分して， $v = \int 6xy\,dx = 3x^2y + p(y)$．…③

③を y で微分した $v_y = 3x^2 + p'(y)$ と②を比較して， $p'(y) = -3y^2$. $\therefore p(y) = -y^3 + c$．これを③に代入して，

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + c \qquad (c \text{ は任意定数}).$$