授業コード：73307-001, 77246-001	参照物：ノート1冊，教科書1冊	回収：解答用紙のみ

応用解析中間試験'18.12/11

１．複素数 $\alpha = 27i$ を極形式で表せ．また，方程式 $z^3 = \alpha$ の解 $z = \beta_0, \beta_1, \beta_2$ の極形式を求め， z 平面上に図示せよ．（１０点）

２． z 平面の円 $C: \left| z + \frac{5}{4} i \right| = \frac{3}{4}$ …①を図示せよ．また， C が1次形式 $w = f(z) = \frac{1}{z}$ により写される図形 M は何か？．（１０点）

３． z 平面の長方形領域 $R: 0 \le \operatorname{Re} z \le \log 2,\ 0 \le \operatorname{Im} z \le \pi$ を図示せよ．また， R が $w = f(z) = e^z$ により w 平面に写される図形 F を図示せよ．（２０点）

４．次の z の値を求めよ．

(1) $z = \cos(i \log 3)$ （１０点）　(2) $z = \tan^{-1} 3i$ （１０点）

５．次の関数 $f(z)$ が正則かどうかをコーシー・リーマンの関係式により判定せよ．

(1) $\cos 2z$ （１０点）　(2) $f(z) = \operatorname{Im}(\sin z)$ （１０点）

６．関数 $u(x, y) = \sin x \cosh y$ が調和関数であることを示し，その共役調和関数を求めよ．（２０点）

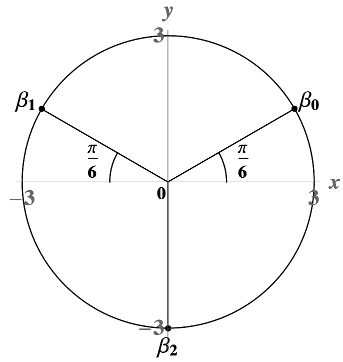
応用解析中間試験'18.12/11解答

１．(10点) $\alpha = 27e^{\pi i/2}$．

$$\beta_0 = 3e^{\pi i/6},$$
$$\beta_1 = 3e^{(1/6+2/3)\pi i} = 3e^{5\pi i/6},.$$
$$\beta_1 = 3e^{(1/6+4/3)\pi i} = 3e^{3\pi i/2}.$$

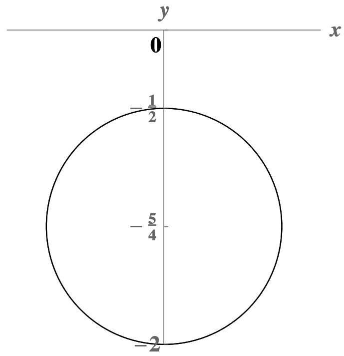
点の位置が特定できない図，記号のない図は不可(図１).

図1



２．(10点) C は中心 $-\frac{5}{4}i$，半径 $\frac{3}{4}$ の円(図2).

図2



①に $z=1/w$ を代入して整理すると，

$$\frac{3}{4} = \left|z + \frac{5i}{4}\right| = \left|\frac{1}{w} + \frac{5i}{4}\right| = \frac{|4+5iw|}{|4w|} = \frac{5}{4}\frac{|w-4i/5|}{|w|}.$$

ゆえに，$M: \frac{|w-4i/5|}{|w|} = \frac{3}{5}$ である．これは，2点 $0, \frac{4i}{5}$ を母点とするアポロニウス円．中心 $c = \frac{4i/5-0}{1-(3/5)^2} = \frac{5i}{4}$，半径 $r = \frac{3/5|4i/5-0|}{|1-(3/5)^2|} = \frac{3}{4}$ である．

３．(20点) 長方形領域 R は図3．境界を含む.

つぎに，$w = e^z$ より，$|w| = e^{\mathrm{Re}\,z}$, $\arg w = \mathrm{Im}\,z$．ゆえに，$0 \le \mathrm{Re}\,z \le \log 2,\ 0 \le \mathrm{Im}\,z \le \pi$ より，

$$1 = e^0 \le |w| = e^{\log 2} \le 2,\ 0 \le \arg w \le \pi.$$

F は扇型領域(図4)．実線境界を含む．両図とも，座標，記号のない図は不可.

図3 $z=x+iy$平面

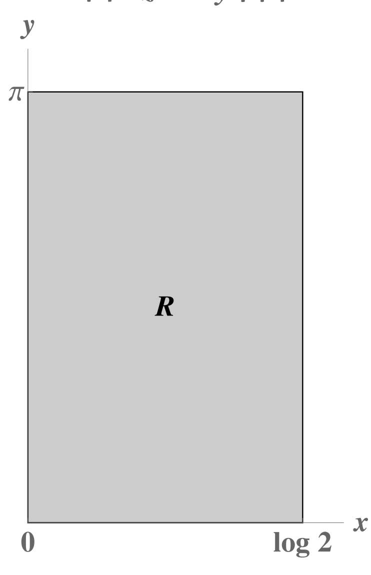
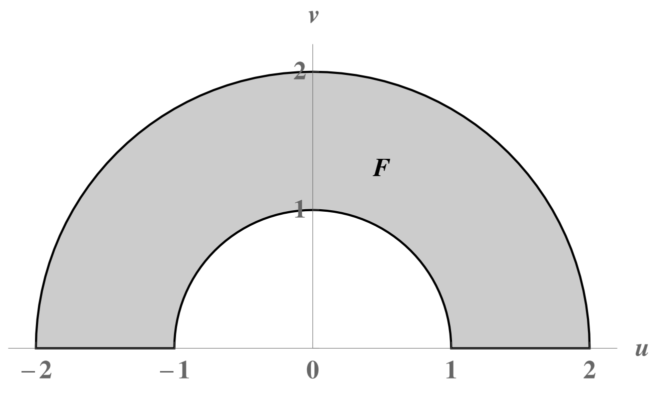


図4. $w=u+iv$平面



4．(1)(10点) $\cos(i\log 3)=\dfrac{e^{i(i\log 3)}+e^{-i(i\log 3)}}{2}=\dfrac{e^{-\log 3}+e^{\log 3}}{2}=\dfrac{1/3+3}{2}=\dfrac{5}{3}$.

(2)(10点) $z=\tan^{-1}3i$ の値の一つは

$$\alpha=\tan^{-1}3i=-\frac{i}{2}\log\frac{i-3i}{i+3i}=-\frac{i}{2}\log\frac{-1}{2}=-\frac{i}{2}\left(\log\frac{1}{2}+\pi i\right)=\frac{i}{2}\log 2+\frac{\pi}{2}.$$

tangentの周期性より， $z=\dfrac{i}{2}\log 2+\frac{1}{2}\pi+n\pi=\dfrac{i}{2}\log 2+\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ （n は任意の整数）．

5．(1)(10点) $\cos 2(x+iy)=\underbrace{\cos 2x\cosh 2y}_{u(x,y)}+i\underbrace{(-\sin 2x\sinh 2y)}_{v(x,y)}$ より，

$u_x=-2\sin 2x\cosh 2y=v_y, v_x=-2\cos 2x\sinh 2y=-u_y$．　$f(z)$ はC.R.を満たすゆえ正則.

(2)(10点) $f(x+iy)=\mathrm{Im}(\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y)=\cos x\sinh y=\underbrace{\cos x\sinh y}_{u(x,y)}+i\underbrace{0}_{v(x,y)}$ より，

$u_x=-\sin x\sinh y\neq 0=v_y$．　$f(z)$ はC.R.を満たさないので非正則.

6．(20点) $u_x=\cos x\cosh y,\ u_{xx}=-\sin x\cosh y,\ u_y=\sin x\sinh y,\ u_{yy}=\sin x\cosh y$．ゆえに $u_{xx}+u_{yy}=0$ が成立し， u は調和.

C-Rより， $v_x=-u_y=-\sin x\sinh y\cdots$①， $v_y=u_x=\cos x\cosh y\cdots$②.

①を x で積分して， $v=\int(-\sin x\sinh y)\,dx=\cos x\sinh y+p(y)$．…③

③を y で微分した $v_y=\cos x\cosh y+p'(y)$ と②を比較して， $p'(y)=0.\ \therefore p(y)=c$．これを③に代入して，

$$v(x,y)=\cos x\sinh y+c \qquad (c\ は任意定数).$$