授業コード：73307-001, 77246-001	参照物：ノート1冊，教科書1冊	回収：解答用紙のみ

応用解析中間試験'17.12/12

１．複素数 $\alpha = -8(1+\sqrt{3}i)$ を極形式で表せ．また，方程式 $z^4 = \alpha$ の解 $z = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ の極形式を求め，z 平面上に図示せよ．（１０点）

２．z 平面の直線 $L: \dfrac{|z-2i|}{|z|} = 1 \cdots$①を図示せよ．また，$L$ が $w = f(z) = \dfrac{1}{z}$ により写される図形 M は何か？．　　　　　　　　　　（１０点）

３．z 平面の扇形領域 $F: 1 \le |z| \le e,\ \dfrac{1}{2}\pi \le \arg z \le \dfrac{3}{2}\pi$ を図示せよ．また，F が $w = f(z) = \mathrm{Log}\, z$ により w 平面に写される図形 R を図示せよ．$\mathrm{Log}\, z$ は複素対数関数 $\log z$ の主値である．（２０点）

４．次の z の値を求めよ．

(1) $z = \tan(-i \log 2)$ （１０点）　　(2) $z = \sin^{-1} 3i$ （１０点）

５．次の関数 $f(z)$ が正則かどうかをコーシー・リーマンの関係式により判定せよ．

(1) $f(z) = z^3$ （１０点）　　(2) $f(z) = i|z|$ （１０点）

６．関数 $u(x,y) = x + e^y \sin x$ が調和関数であることを示し，その共役調和関数を求めよ．（２０点）

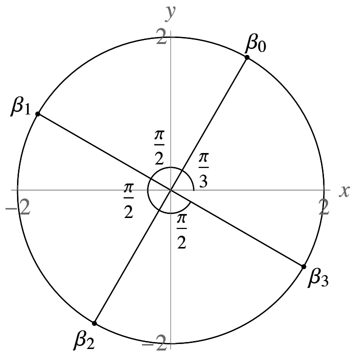
応用解析中間試験'17.12/12解答

１．(10点) $\alpha=16e^{4\pi i/3}$． $\alpha=8\left(-1-i\sqrt{3}\right)=8\left(2e^{4\pi i/3}\right)=16e^{4\pi i/3}$ である．

$$\beta_0=2e^{\pi i/3},$$
$$\beta_1=2e^{(1/3+1/2)\pi i}=2e^{5\pi i/6},$$
$$\beta_2=2e^{(1/3+1)\pi i}=2e^{4\pi i/3},$$
$$\beta_3=2e^{(1/3+3/2)\pi i}=2e^{11\pi i/6}$$

点の位置が特定できない図，記号のない図は不可(図１)．

図1



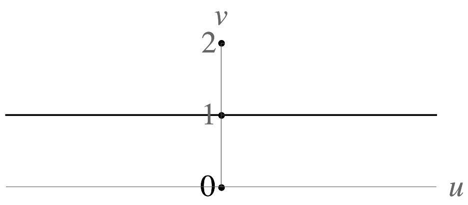
２．(10点) $z\in L$ は2点 $2i,0$ と等距離にある． L は2点 $2i,0$ を結ぶ線分の垂直二等分線(図2)．

①に $z=1/w$ を代入して整理すると，

$$1=\frac{|z-2i|}{|z|}=\frac{|1/w-2i|}{|1/w|}=|1-2iw|=|-2i|\left|w-\frac{1}{2i}\right|=2\left|w+\frac{1}{2}i\right|.$$

ゆえに， $M:\left|w+\frac{1}{2}i\right|=\frac{1}{2}$ である．これは，中心 $-\frac{1}{2}i$ ，半径 $\frac{1}{2}$ の円である．

図2



３．(20点) F は扇形(図3)．境界を含む．

つぎに， $w=\mathrm{Log}\,z=\log|z|+i\mathrm{Arg}\,z,\ -\pi<\mathrm{Arg}\,z\le\pi$ より， $\mathrm{Re}\,w=\log|z|,\ \mathrm{Im}\,w=\mathrm{Arg}\,z$ ． $1\le|z|\le e$ より， w の実部の範囲は

$$0=\log 1\le\mathrm{Re}\,w=\log|z|\le\log e=1\cdots①.$$

$\mathrm{Arg}\,z$ は $(-\pi,\pi]$ の範囲で z の偏角を計算するので， w の虚部の範囲は，

$$\frac{1}{2}\pi\le\arg z\le\pi \text{ のとき } \frac{1}{2}\pi\le\mathrm{Im}\,w=\mathrm{Arg}\,z=\arg z\le\pi\cdots②,$$

$$\pi<\arg z\le\frac{3}{2}\pi \text{ のとき } -\pi<\mathrm{Im}\,w=\mathrm{Arg}\,z=\arg z-2\pi\le-\frac{1}{2}\pi\cdots③$$

となる．以上より R は2つの長方形領域の和集合(図4)．実線境界を含む．

座標，記号のない図は不可．

図3. z=x+iy平面

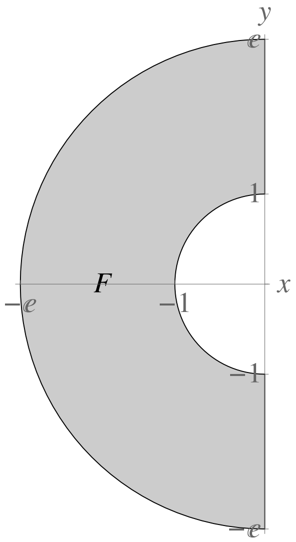
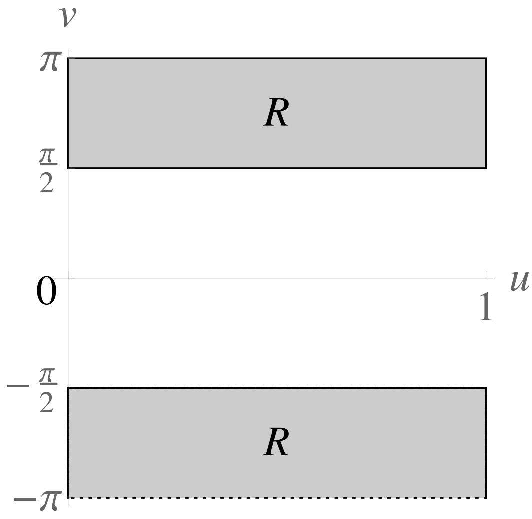


図4 w=u+iv平面



4．(1)(10点) $\tan(-i\log 2)=\dfrac{e^{i(-i\log 2)}-e^{-i(-i\log 2)}}{i(e^{i(-i\log 2)}+e^{-i(-i\log 2)})}=-i\dfrac{2-1/2}{2+1/2}=-\dfrac{3}{5}i$．

(2)(10点) $z=\sin^{-1}3i$ の値の一つは

$$\alpha=\sin^{-1}3i=-i\log\left(i(3i)+\sqrt{1-(3i)^2}\right)=-i\log\left(-3+\sqrt{10}\right).$$

sineの周期性より， $z=\frac{1}{2}\pi\pm\left(\frac{1}{2}\pi+i\log\left(-3+\sqrt{10}\right)\right)+2n\pi$ （n は任意の整数）．

5．(1)(10点) $f(z)=(x+iy)^3=x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3=\underbrace{(x^3-3xy^2)}_{u(x,y)}+i\underbrace{(3x^2y-y^3)}_{v(x,y)}$ より，

$u_x=3x^2-3y^2=v_y, v_x=6xy=-u_y$． $f(z)$ はC.R.を満たすゆえ正則.

(2)(10点) $f(z)=i\sqrt{x^2+y^2}=\underbrace{0}_{u(x,y)}+i\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{v(x,y)}$ より， $u_x=0\neq\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=v_y$． $f(z)$ はC.R.を満たさないので非正則.

6．(20点) $u_x=1+e^y\cos x,\ u_{xx}=-e^y\sin x,\ u_y=e^y\sin x,\ u_{yy}=e^y\sin x$． ゆえに $u_{xx}+u_{yy}=0$ が成立し， u は調和.

C-Rより， $v_x=-u_y=-e^y\sin x\cdots$①， $v_y=u_x=1+e^y\cos x\cdots$②.

①を x で積分して， $v=\int(-e^y\sin x)dx=e^y\cos x+p(y)$． …③

③を y で微分した $v_y=e^y\cos x+p'(y)$ と②を比較して， $p'(y)=1$. $\therefore p(y)=y+c$． これを③に代入して，

$$v(x,y)=y+e^y\cos x+c \qquad (c\ は任意定数).$$