授業コード：73307-001, 77246-001	参照物：ノート1冊，教科書1冊	回収：解答用紙のみ

応用解析中間試験'16.11/15

１．複素数 $\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta=\sqrt{3}+i$ を複素平面に図示し，極形式で表せ．また，$\gamma=\alpha^3\beta$, $\delta=\dfrac{\alpha}{\beta^2}$ の極形式を求めよ．（１０点）

２．z 平面の中心 $1-2i$ 半径2の円が，$w=f(z)=\dfrac{1}{z}$ により w 平面に写される図形を図示せよ．

（１０点）

３．z 平面の長方形領域 $R: 0\le \mathrm{Re}\,z\le \log 2,\ -\dfrac{1}{2}\pi\le \mathrm{Im}\,z\le \dfrac{1}{2}\pi$ を図示せよ．また，R が $w=f(z)=e^z$ により w 平面に写される図形 F を図示せよ．（２０点）

４．次の z の値を求めよ．

(1) $z=\cos(\pi+i\log 2)$ （１０点）　(2) $z=\cos^{-1}3$ （１０点）

５．次の関数 $f(z)$ が正則かどうかをコーシー・リーマンの関係式により判定せよ．

(1) $f(z)=e^{2z}$ （１０点）　(2) $f(z)=-\overline{z}$ （１０点）

６．関数 $u(x,y)=e^{-x}\cos y$ が調和関数であることを示し，その共役調和関数を求めよ．（２０点）

応用解析中間試験'16.11/15解答

1．(10点) $\alpha = e^{3\pi i/4}, \beta = 2e^{\pi i/6}, \gamma = 2e^{5\pi i/12}, \delta = \frac{1}{4}e^{5\pi i/12}$．座標，記号のない図は不可(図１)．

図1

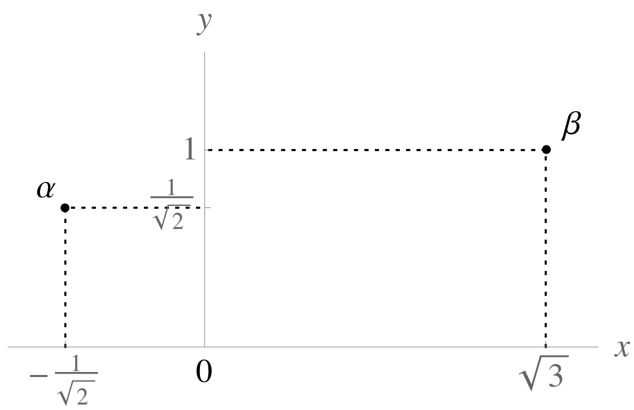
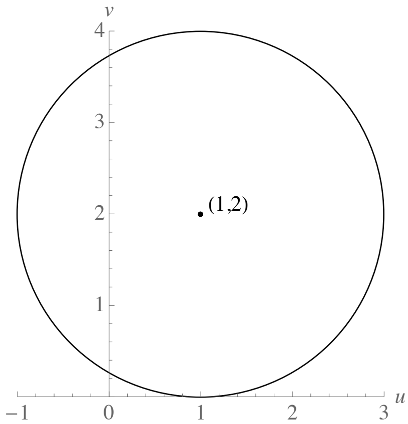


図2



2．(10点) z 平面の円の方程式：$(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$．整理して，$(x^2+y^2)-2x+4y+1=0$．ゆえに w 平面の像の方程式は，$1-2u-4v+(u^2+v^2)=0$．整理して，$(u-1)^2+(v-2)^2=2^2$．すなわち，中心 $(1,2)$，半径2の円(図2)．座標，記号のない図は不可．

3．(20点) R は長方形(図3)．境界を含む．

$F: 1=e^0 \le |w| \le e^{\log 2}=2,\ -\frac{1}{2}\pi \le \arg w \le \frac{1}{2}\pi$ は扇形(図4)．境界を含む．

座標，記号のない図は不可．

図3 $z=x+iy$平面

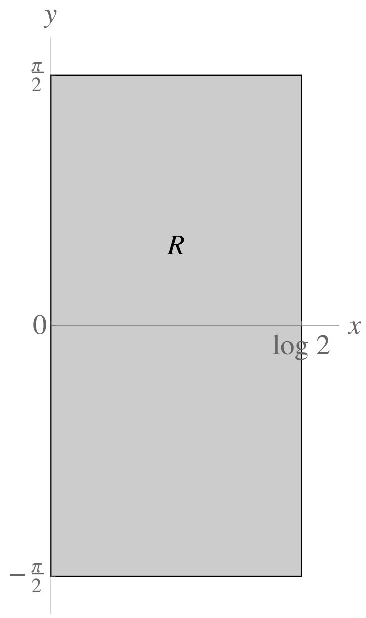
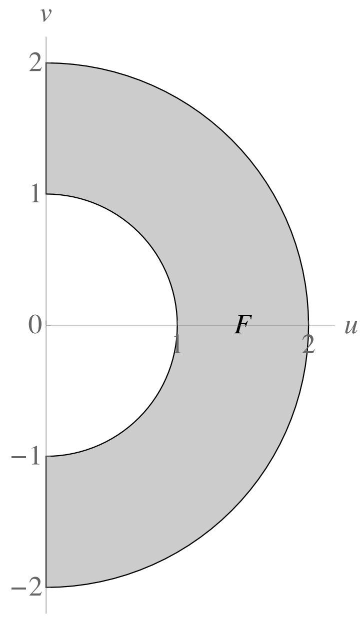


図4. $w=u+\mathrm{i}v$平面



4．(1)(10点) $z=\cos\pi\cosh\log 2-i\sin\pi\sinh\log 2=-\cosh\log 2=-\dfrac{e^{\log 2}+e^{-\log 2}}{2}=-\dfrac{2+2^{-1}}{2}=-\dfrac{5}{4}$．

(2)(10点) $z=\cos^{-1}3$ の値の一つは

$$\alpha=\cos^{-1}3=-i\log\left(3+\sqrt{3^2-1}\right)=-i\log\left(3+2\sqrt{2}\right).$$

cosineの周期性より， $z=\pm i\log\left(3+2\sqrt{2}\right)+2n\pi$ （n は任意の整数）．

5．(1)(10点) $f(x,y)=e^{2(x+iy)}=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y)=\underbrace{e^{2x}\cos 2y}_{u(x,y)}+i\underbrace{e^{2x}\sin 2y}_{v(x,y)}$ より，

$u_x=2e^{2x}\cos 2y=v_y, v_x=2e^{2x}\sin 2y=-u_y$．　$f(z)$ はC.R.を満たすゆえ正則.

(2)(10点) $f(z)=-\overline{z}=-(x-iy)=\underbrace{-x}_{u(x,y)}+i\underbrace{y}_{v(x,y)}$ より，

$u_x=-1\neq 1=v_y$．　$f(z)$ はC.R.を満たさないので非正則.

6．(20点) $u_x=-e^{-x}\cos y,\ u_{xx}=e^{-x}\cos y,\ u_y=-e^{-x}\sin y,\ u_{yy}=-e^{-x}\cos y$．ゆえに $u_{xx}+u_{yy}=0$ が成立し， u は調和.

C-Rより， $v_x=-u_y=e^{-x}\sin y\cdots$①， $v_y=u_x=-e^{-x}\cos y\cdots$②.

①を x で積分して， $v=\int e^{-x}\sin y\,dx=-e^{-x}\sin y+p(y)$．$\cdots$③

③を y で微分した $v_y=-e^{-x}\cos y+p'(y)$ と②を比較して， $p'(y)=0$. $\therefore p(y)=c$．これを③に代入して，

$$v(x,y)=-e^{-x}\sin y+c \qquad (c \text{ は任意定数}).$$