| | | |
|---|---|---|
| 授業コード：51B02-001 | 参照物：ノート，教科書 | 回収：解答用紙のみ |

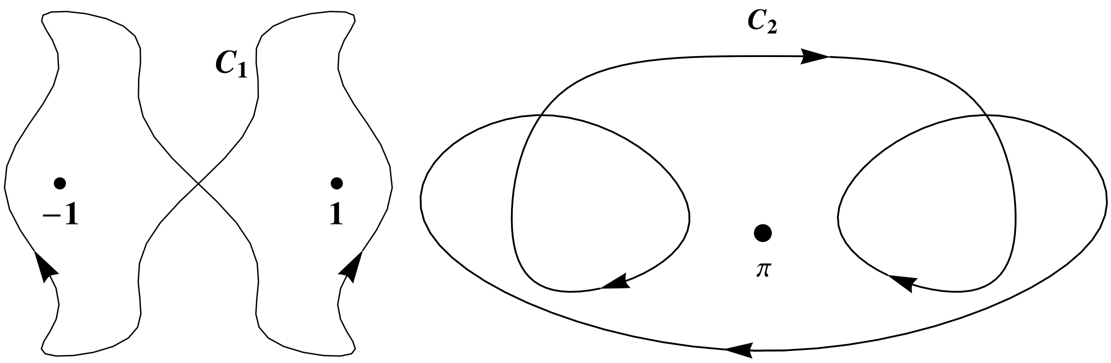
# 応用解析定期試験'19.01/28

１．次の複素積分を求めよ．（各10点）

(1) $I_1 = \int_{C_1} \mathrm{Im}\, z\, dz$．ここで，$C_1 : z = 1 + it \ (t : 0 \to 1)$ は2点 $1, 1+i$ を結ぶ線分.

(2) $I_2 = \int_{C_2} z^2\, dz$．ここで，$C_2 : z = e^{it} \left( t : \pi \to \dfrac{3\pi}{2} \right)$ は原点を中心とする４分円.

２．下図の積分路につき，複素積分値を求めよ．（各10点）




(1) $I_1 = \int_{C_1} \dfrac{2e^{\pi i z}}{z^2 - 1} dz$，

(2) $I_2 = \int_{C_2} \dfrac{\cos z}{(z-\pi)^3}\, dz$．

３．次のベキ級数の収束半径を求めよ．（各10点）

(1) $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (z-\alpha)^k$

(2) $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k^2} (z-\alpha)^k$

４．次の関数 $f(z)$ を指定された点 $\alpha$ を中心としてテイラー展開せよ．（各10点）

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z} \ (\alpha = i)$

(2) $f(z) = z e^{-z^2} \quad (\alpha = 0)$

５．次の関数を指定された領域でローラン展開し，その主要部と正則部を示せ．（各10点）

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z+1} + \dfrac{1}{z-2} \ (1 < |z| < 2)$

(2) $f(z) = \dfrac{\cos 2z}{z^3} \ \left( |z| > 0 \right)$

# 応用解析定期試験19.01/28解答

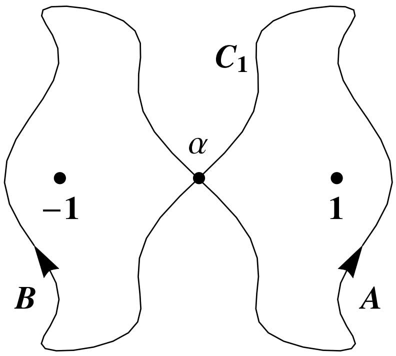
１．次の複素積分を求めよ．（各10点）

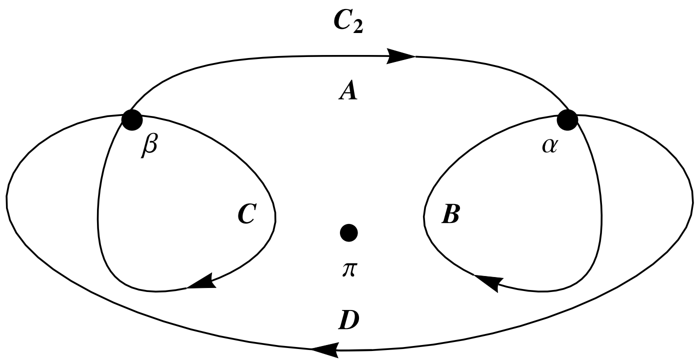
(1) $I_1=\int_{C_1}\operatorname{Im}z\,dz=\int_0^1\operatorname{Im}\underbrace{\{1+it\}}_{z}\underbrace{i}_{z'}\,dt=\int_0^1 ti\,dt=i\int_0^1 t\,dt=\dfrac{i}{2}$.

(2) $f(z)=z^2$ は正則で，原始関数は $F(z)=\dfrac{z^3}{3}$ である．また，$C_2$ の始点は $e^{i\pi}=-1$，終点は

$e^{i3\pi/2}=-i$．よって，$I_2=F(-i)-F(-1)=\dfrac{1}{3}\left\{(-i)^3-(-1)^3\right\}=\dfrac{1}{3}(1+i).$

２．下図の積分路につき，複素積分値を求めよ．（各10点）




(1) $I_1=\displaystyle\int_{C_1}\frac{2e^{\pi iz}}{z^2-1}dz$，　　　(2) $I_2=\displaystyle\int_{C_2}\frac{\cos z}{(z-\pi)^3}\,dz$．

(1) $f(z)=e^{\pi iz}$ は正則関数である．図のように交点 $\alpha$ で積分路 $C_1$ を分け，$C_1=A+B$ とする．部分分数分解 $\dfrac{2}{z^2-1}=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z+1}$ と，コーシーの積分定理，コーシーの積分公式より，

$$I_1=\int_{A+B}\frac{f(z)}{z-1}dz-\int_{A+B}\frac{f(z)}{z+1}dz=\underbrace{\int_A\frac{f(z)}{z-1}dz}_{\text{左回り:}2\pi if(1)}+\underbrace{\int_B\frac{f(z)}{z-1}dz}_{\text{囲まない:}0}-\underbrace{\int_A\frac{f(z)}{z+1}dz}_{\text{囲まない:}0}-\underbrace{\int_B\frac{f(z)}{z+1}dz}_{\text{右回り:}-2\pi if(-1)}$$
$$=2\pi i\left(e^{\pi i}+e^{-\pi i}\right)=2\pi i(-1-1)=-4\pi i.$$

(2) $f(z)=\cos z$ は正則関数であり，$f^{(2)}(z)=-\cos z$ である．図のように交点 $\alpha,\beta$ で積分路 $C_2$ を分け，$C_2=A+B+D+C$ とすると，コーシーの積分定理，コーシーの積分公式より，

$$I_2=\int_{A+D+B+C}\frac{f(z)}{(z-\pi)^3}dz=\underbrace{\int_{A+D}\frac{f(z)}{(z-\pi)^3}dz}_{\text{右回り:}-\frac{2\pi if^{(2)}(\pi)}{2!}}+\underbrace{\int_B\frac{f(z)}{(z-\pi)^3}dz}_{\text{囲まない:}0}+\underbrace{\int_C\frac{f(z)}{(z-\pi)^3}dz}_{\text{囲まない:}0}=-\frac{2\pi if^{(2)}(\pi)}{2!}=\pi i\cos\pi=-\pi i.$$

３．次のベキ級数の収束半径を求めよ．（各10点）

(1) $k$ 次係数は $c_k=k^2$ であるから，ダランベールの公式より，

$$\frac{1}{R}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^2}{k^2}\right|=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^2=1^2=1\text{．ゆえに，}\quad R=1\text{．}$$

(2) $k$ 次係数は $c_k=2^{-k^2}$ であるから，コーシー・アダマールの公式より，

$$\frac{1}{R}=\lim_{k\to\infty}\left|c_k\right|^{1/k}=\lim_{k\to\infty}\left|2^{-k^2}\right|^{1/k}=\lim_{k\to\infty}2^{-k}=0\text{．ゆえに，}\quad R=\infty\text{．}$$

４．次の関数 $f(z)$ を指定された点 $\alpha$ を中心としてテイラー展開せよ．（各10点）

(1) $$f(z)=\frac{1}{\underbrace{(z-i)}_{小}+\underset{大}{i}}=\frac{1}{i}\frac{1}{1-\underbrace{\left(-\frac{z-i}{i}\right)}_{r}}=\frac{1}{i}\sum_{k=0}^{\infty}r^k=\frac{1}{i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{i}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{i^{k+1}}(z-i)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-i^{k+1})(z-i)^k\text{．}$$

(2) $g(z)=e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$ と置くと，

$$f(z)=zg(-z^2)=z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z^2)^k}{k!}=z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k!}\text{．}$$

５．次の関数を指定された領域でローラン展開せよ．（各10点）

(1) 中心は $(\alpha=0)$ である．分母に $z-\alpha$ の項を強制的に作る．不等式 $1<|z|<2$ で大小判定.

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{\underset{大}{z}-\underbrace{(-1)}_{小}}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\underbrace{\left(-\frac{1}{z}\right)}_{r}}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}r^k=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-k-1},$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{\underset{小}{z}-\underset{大}{2}}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1-\underbrace{\left(\frac{z}{2}\right)}_{r}}=\frac{-1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}r^k=\frac{-1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k=-\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k-1}z^k,$$

より， $$f(z)=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-k-1}}_{主要部}\underbrace{-\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k-1}z^k}_{正則部}\text{．}$$

(2) 中心は $\alpha=0$ である． $\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}$ より，

$$f(z)=z^{-3}\cos 2z=z^{-3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(2z)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}z^{2k-3}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-4)^k}{(2k)!}z^{2k-3}\text{．}$$

$k=0,1$ の項のみが負ベキとなるので,

$$f(z)=\underbrace{\overbrace{z^{-3}}^{k=0}-\overbrace{2z^{-1}}^{k=1}}_{主要部}+\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-4)^k}{(2k)!}z^{2k-3}}_{正則部}\text{．}$$