授業コード：51B02-001	参照物：ノート，教科書	回収：解答用紙のみ

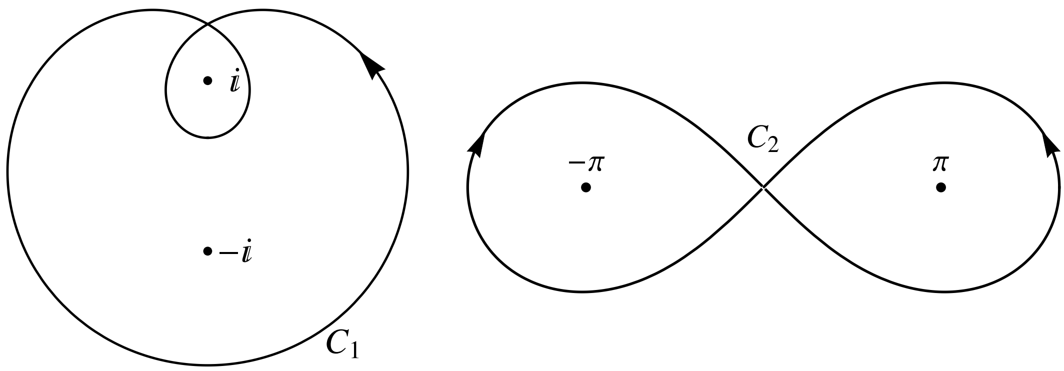
応用解析定期試験'18.01/31

1．次の複素積分を求めよ．（各10点）

(1) $I_1=\int_{C_1}\mathrm{Re}\,z\,dz,\ C_1: z=(1+i)t\ (t:0\to 1)$ は2点 $0, 1+i$ を結ぶ線分.

(2) $I_2=\int_{C_2}\sin z\,dz,\ C_2: z=e^{it}\left(t:0\to\dfrac{\pi}{2}\right)$ は原点を中心とする４分円.

2．下図の積分路につき，複素積分値を求めよ．（各10点）



(1) $I_1=\int_{C_1}\dfrac{2ie^{\pi z}}{z^2+1}dz$,　　(2) $I_2=\int_{C_2}\left(\dfrac{1}{(z+\pi)^2}+\dfrac{1}{z-\pi}\right)\sin z\,dz$.

3．次のベキ級数の収束半径を求めよ．（各10点）

(1) $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{k}{k+1}(z-\alpha)^k$　　(2) $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}k^{-k}(z-\alpha)^k$

4．次の関数 $f(z)$ を指定された点 α を中心としてテイラー展開せよ．（各10点）

(1) $f(z)=\dfrac{1}{z+1}\ (\alpha=1)$　　(2) $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}\ (\alpha=0)$

5．次の関数を指定された領域でローラン展開し，その主要部と正則部を示せ．（各10点）

(1) $f(z)=\dfrac{1}{z+1}+\dfrac{1}{z+2}\ (2<|z-1|<3)$　　(2) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}\ (|z|>0)$

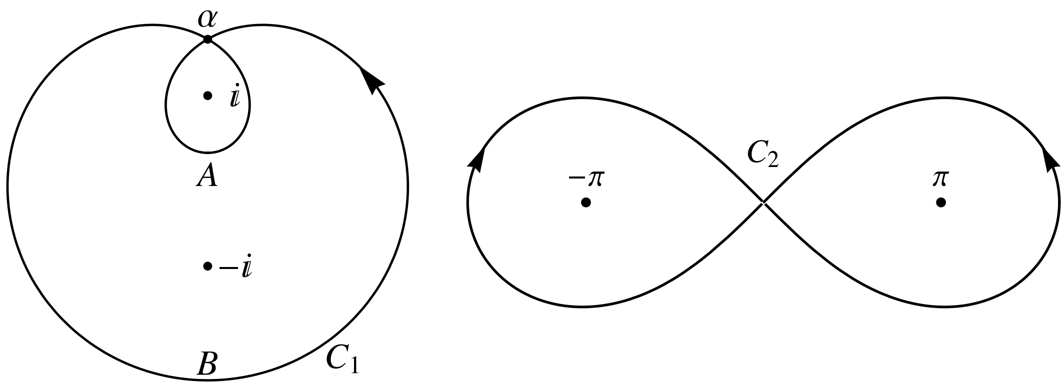
応用解析定期試験18.01/31解答

1．次の複素積分を求めよ．（各10点）

(1) $I_1=\int_{C_1}\mathrm{Re}\,z\,dz=\int_0^1\mathrm{Re}\{\underbrace{(1+i)t}_{z}\}\underbrace{(1+i)}_{z'}dt=\int_0^1 t(1+i)dt=(1+i)\int_0^1 t\,dt=\dfrac{1+i}{2}$.

(2) $f(z)=\sin z$ は正則で，原始関数は $F(z)=-\cos z$ である．また， C_2 の始点は $e^{i0}=1$，終点は $e^{i\pi/2}=i$．よって， $I_2=F(i)-F(1)=(-\cos i)-(-\cos 1)=\cos 1-\cosh 1$.

2．下図の積分路につき，複素積分値を求めよ．（各10点）



(1) $f(z)=e^{\pi z}$ は正則関数である．図のように交点 α で積分路 C_1 を分け， $C_1=A+B$ とする．部分分数分解 $\dfrac{2i}{z^2+1}=\dfrac{1}{z-i}-\dfrac{1}{z+i}$ と，コーシーの積分定理，コーシーの積分公式より，

$$I_1=\int_{A+B}\frac{f(z)}{z-i}dz-\int_{A+B}\frac{f(z)}{z+i}dz=\underbrace{\int_A\frac{f(z)}{z-i}dz}_{\text{左回り:}2\pi i f(i)}+\underbrace{\int_B\frac{f(z)}{z-i}dz}_{\text{左回り:}2\pi i f(i)}-\underbrace{\int_A\frac{f(z)}{z+i}dz}_{\text{囲まない:}0}-\underbrace{\int_B\frac{f(z)}{z+i}dz}_{\text{左回り:}2\pi i f(-i)}$$

$$=2\pi i\left(e^{\pi i}+e^{\pi i}-e^{-\pi i}\right)=2\pi i(-1-1+1)=-2\pi i.$$

(2) $f(z)=\sin z$ は正則関数であり， $f'(z)=\cos z$ である．図のように交点 α で積分路 C_2 を分け， $C_2=A+B$ とすると，コーシーの積分定理，コーシーの積分公式より，

$$I_2=\int_{A+B}\frac{f(z)}{(z+\pi)^2}dz+\int_{A+B}\frac{f(z)}{z-\pi}dz=\underbrace{\int_A\frac{f(z)}{(z+\pi)^2}dz}_{\text{右回り:}-2\pi i f'(-\pi)}+\underbrace{\int_B\frac{f(z)}{(z+\pi)^2}dz}_{\text{囲まない:}0}+\underbrace{\int_A\frac{f(z)}{z-\pi}dz}_{\text{囲まない:}0}+\underbrace{\int_B\frac{f(z)}{z-\pi}dz}_{\text{左回り:}2\pi i f(\pi)}$$

$$=-2\pi i\cos(-\pi)+2\pi i\sin\pi=-2\pi i\cos(-\pi)=2\pi i.$$

3．次のベキ級数の収束半径を求めよ．（各10点）

(1) k 次係数は $c_k=\dfrac{k}{k+1}$ であるから，ダランベールの公式より，

$$\frac{1}{R}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)/(k+2)}{k/(k+1)}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}=\lim_{k\to\infty}\frac{(1+k^{-1})^2}{(1+2k^{-1})}=1.$$ ゆえに， $R=1$．

(2) k 次係数は $c_k=k^{-k}$ であるから，コーシー・アダマールの公式より，

$$\frac{1}{R}=\lim_{k\to\infty}\left|c_k\right|^{1/k}=\lim_{k\to\infty}\left|k^{-k}\right|^{1/k}=\lim_{k\to\infty}k^{-k/k}=\lim_{k\to\infty}k^{-1}=0$$．ゆえに，$R=\infty$．

4．次の関数 $f(z)$ を指定された点 α を中心としてテイラー展開せよ．（各10点）

(1) $$f(z)=\frac{1}{\underbrace{(z-1)}_{小}+\underbrace{2}_{大}}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\underbrace{\left(-\frac{z-1}{2}\right)}_{r}}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}r^k=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(z-1)^k.$$

(2) $$f(z)=\frac{1}{z^2-1}=-\frac{1}{1-\underbrace{z^2}_{r}}=-\sum_{k=0}^{\infty}\left(z^2\right)^k=-\sum_{k=0}^{\infty}z^{2k}.$$

5．次の関数を指定された領域でローラン展開せよ．（各10点）

(1) 中心は $\alpha=1$ である．分母に $z-\alpha$ の項を強制的に作る．不等式 $2<|z-1|<3$ で大小判定.

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{\underbrace{(z-1)}_{大}+\underbrace{2}_{小}}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\underbrace{\left(-\frac{2}{z-1}\right)}_{r}}=\frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}r^k=\frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z-1}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k(z-1)^{-k-1},$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{\underbrace{(z-1)}_{小}+\underbrace{3}_{大}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\underbrace{\left(-\frac{z-1}{3}\right)}_{r}}=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}r^k=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{3}\right)^k=-\sum_{k=0}^{\infty}(-3)^{-k-1}(z-1)^k$$

より， $$f(z)=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k(z-1)^{-k-1}}_{主要部}\underbrace{-\sum_{k=0}^{\infty}(-3)^{-k-1}(z-1)^k}_{正則部}.$$

(2) 中心は $\alpha=0$ である． $f(z)=\frac{\sin z}{z^3}$ $(|z|>0)$

$\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}$ より， $f(z)=z^{-3}\sin z=z^{-3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k-2}$． $k=0$ の項のみが負ベキとなるので,

$$f(z)=\underbrace{z^{-2}}_{主要部}+\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k-2}}_{正則部}.$$