授業コード：77246-001	参照物：ノート，教科書	回収：解答用紙のみ

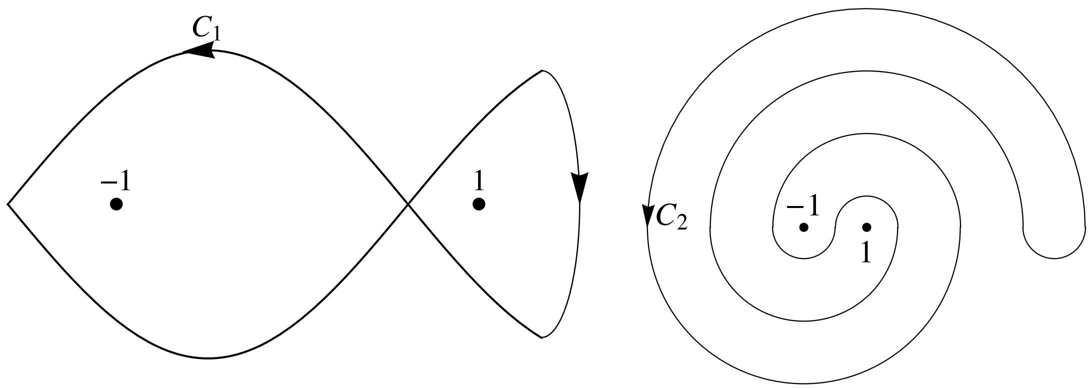
応用解析定期試験'17.01.25

1．次の複素積分を求めよ．（各10点）

(1) $I_1=\int_{C_1}|z|^2\,dz,\ C_1: z=it\ (t:0\to 1)$ は2点 $0, i$ を結ぶ線分.

(2) $I_2=\int_{C_2}z^2\,dz,\ C_2: z=e^{it}\ (t:0\to \pi)$ は2点 $1,-1$ を結ぶ半円.

2．下図の積分路につき，複素積分値を求めよ．（各10点）



(1) $I_1=\int_{C_1}\dfrac{2\sin z}{z^2-1}dz$,

(2) $I_2=\int_{C_2}\left(\dfrac{1}{(z+1)^2}+\dfrac{1}{(z-1)}\right)e^z\,dz$.

3．次のベキ級数の収束半径を求めよ．（各10点）

(1) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}(z-\alpha)^n$

(2) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n^2}}(z-\alpha)^n$

4．次の関数 $f(z)$ を指定された点 α を中心としてテイラー展開せよ．（各10点）

(1) $f(z)=\dfrac{1}{z}\ \ (\alpha=1+i)$

(2) $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)}\quad (\alpha=i)$

5．次の関数を指定された領域でローラン展開せよ．（各10点）

(1) $f(z)=\dfrac{1}{z+1}\ \ (|z-1|>2)$

(2) $f(z)=z\cosh z^{-2}\ \ (|z|>0)$

応用解析定期試験17.01.25解答

1．次の複素積分を求めよ．（各10点）

(1) $I_1=\int_{C_1}|z|^2\,dz,\ C_1: z=it\ (t:0\to 1)$ は2点 $0, i$ を結ぶ線分.

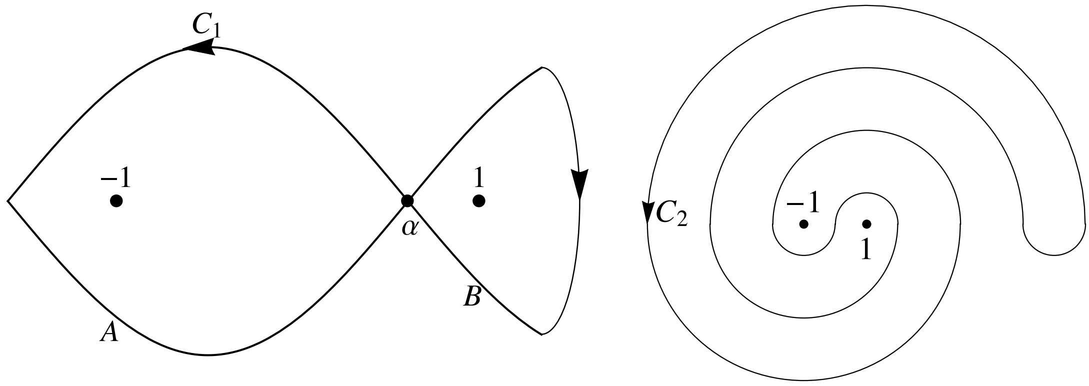
$$I_1=\int_{C_1}|z|^2\,dz=\int_0^1 \underbrace{|it|}_{|z|}{}^2\ \underbrace{i}_{z'(t)}\ dt=i\int_0^1 t^2\,dt=\frac{i}{3}.$$

(2) $I_2=\int_{C_2}z^2\,dz,\ C_2: z=e^{it}\ (t:0\to \pi)$ は2点 $1,-1$ を結ぶ半円.

$f(z)=z^2$ は正則で原始関数は $F(z)=\frac{1}{3}z^3$．よって，$I_2=F(-1)-F(1)=\frac{1}{3}(-1)^3-\frac{1}{3}1^3=\frac{-2}{3}$.

（別解）$I_2=\int_{C_2}z^2\,dz=\int_0^\pi \underbrace{\left(e^{it}\right)}_{z(t)}{}^2\ \underbrace{ie^{it}}_{z'(t)}\,dt=i\int_0^\pi e^{3it}\,dt=i\left[\frac{1}{3i}e^{3it}\right]_0^\pi=\frac{1}{3}\left(e^{3\pi i}-e^0\right)=\frac{1}{3}\left((-1)-1\right)=\frac{-2}{3}$.

2．下図の積分路につき，複素積分値を求めよ．（各10点）



(1) $I_1=\int_{C_1}\frac{2\sin z}{z^2-1}dz$,　　(2) $I_2=\int_{C_2}\left(\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z-1)}\right)e^z\,dz$.

(1) $I_1=\int_{C_1}\frac{2\sin z}{z^2-1}dz$．$C_1$ を交点 α で単純閉曲線 A (左側)と B (右側)に分け，$C_1=A+B$ とする．A は -1 を正の向きに囲い，1 を囲わない．B は 1 を負の向きに囲い，-1 を囲わない．$f(z)=\sin z$ は正則であるから，$\frac{2}{z^2-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}$ により，

$$\begin{aligned}I_1&=\int_A+\int_B=\left\{\int_A\frac{f(z)}{z-1}dz-\int_A\frac{f(z)}{z+1}dz\right\}+\left\{\int_B\frac{f(z)}{z-1}dz-\int_B\frac{f(z)}{z+1}dz\right\}\\&=\left\{0-(2\pi i\,f(-1))\right\}+\left\{(-2\pi i\,f(1))-0\right\}=-2\pi i\sin(-1)-2\pi i\sin 1=0.\end{aligned}$$

(2) $I_2=\int_{C_2}\left(\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z-1)}\right)e^z\,dz$．$C_2$ は -1 を正の向きに囲い，1 を囲わない．ゆえに，$f(z)=e^z$ としてコーシーの積分公式を用いると，

$$I_2=\int_{C_2}\left(\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z-1)}\right)f(z)\,dz=\int_{C_2}\frac{f(z)}{(z+1)^2}\,dz=2\pi i f'(-1)=2\pi i e^{-1}.$$

３．次のベキ級数の収束半径を求めよ．（各10点）

(1) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}(z-\alpha)^n$．係数 $c_n=\frac{n^2}{3^n}$ ゆえ，ダランベールの公式より，

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2/3^{(n+1)}}{n^2/3^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n^{-1})^2}{3}=\frac{1}{3}.\quad \therefore R=3.$$

(2) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2}}(z-\alpha)^n$．係数 $c_n=\frac{1}{2^{n^2}}$ ゆえ，

・コーシー・アダマールの公式より，$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^{n^2}}\right|^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.\quad\therefore R=\infty.$

・ダランベールの公式より，$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/2^{(n+1)^2}}{1/2^{n^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{(n+1)^2-n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}=0.\ \therefore R=\infty.$

４．次の関数 $f(z)$ を指定された点 α を中心としてテイラー展開せよ．（各10点）

(1) $f(z)=\frac{1}{z}\ (\alpha=1+i)$．（テイラー展開では $z-\alpha$ の絶対値は小さいと考える．）

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\underbrace{(z-1-i)}_{z-\alpha\text{小}}+\underbrace{(1+i)}_{\text{大}}}=\frac{1}{\underbrace{(1+i)}_{\text{大で括る}}}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1-i}{1+i}\right)}=\frac{1}{1+i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1-i}{1+i}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(1+i)^{k+1}}(z-1-i)^k.$$

(2) $f(z)=\frac{1}{z(z+1)}\quad(\alpha=i)$．部分分数分解 $f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}$ による．

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\underbrace{(z-i)}_{z-\alpha\text{小}}+\underbrace{i}_{\text{大}}}=\frac{1}{\underbrace{i}_{\text{大で括る}}}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{i}\right)}=\frac{1}{i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{i}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{i^{k+1}}(z-i)^k.$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{\underbrace{(z-i)}_{z-\alpha\text{小}}+\underbrace{(1+i)}_{\text{大}}}=\frac{1}{\underbrace{(1+i)}_{\text{大で括る}}}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{1+i}\right)}=\frac{1}{(1+i)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{1+i}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(1+i)^{k+1}}(z-i)^k.$$

$$\therefore f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{i^{k+1}}(z-i)^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(1+i)^{k+1}}(z-i)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{i^{k+1}}-\frac{1}{(1+i)^{k+1}}\right)(z-i)^k.$$

５．次の関数を指定された領域でローラン展開せよ．（各10点）

(1) $f(z)=\frac{1}{z+1}\ (|z-1|>2)$．$|z-1|>2$ より，$(z-1)$ は大，2 は小と考える．

$$f(z)=\frac{1}{\underbrace{(z-1)}_{\text{大}}+\underbrace{2}_{\text{小}}}=\frac{1}{\underbrace{z-1}_{\text{大で括る}}}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-2}{z-1}\right)}=\frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{z-1}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k(z-1)^{-k-1}=\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}(-2)^{k-1}(z-1)^{-k}}_{\text{主要部}}.$$

(2) $f(z)=z\cosh z^{-2}\ (|z|>0)$．公式：$\cosh u=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}u^{2k}$ に $u=z^{-2}$ を代入．

$$f(z) = z\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\Big(\underbrace{z^{-2}}_{u}\Big)^{2k}}_{\cosh z^{-2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}z^{-4k+1} = \underbrace{z}_{\text{正則部}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}z^{-4k+1}}_{\text{主要部}}$$