授業コード：77246-001	参照物：ノート，教科書	回収：解答用紙のみ

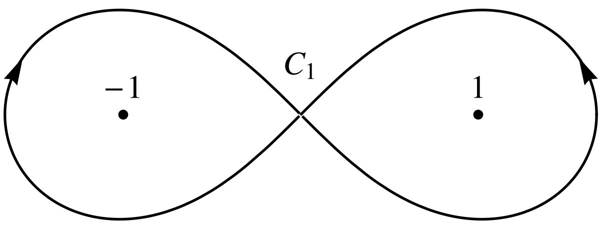
応用解析定期試験’16.01.26

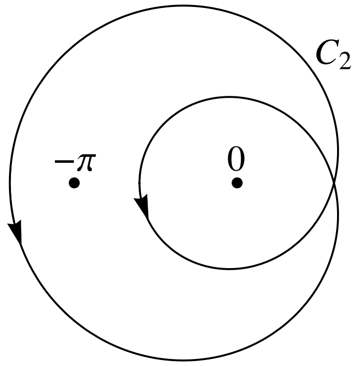
1．次の複素積分を求めよ．（各10点）

(1) $I_1 = \int_{C_1} \mathrm{Im}\, z \, dz,\ C_1 : z = t + i\ (t : 0 \to 1)$ は2点 $i, 1+i$ を結ぶ線分.

(2) $I_2 = \int_{C_2} e^{z} \, dz,\ C_2 : z = 1 + it\ (t : 0 \to \pi)$ は2点 $1, 1+\pi i$ を結ぶ線分.

2．下図の積分路につき，複素積分値を求めよ．（各10点）





(1) $I_1 = \int_{C_1} \dfrac{2\cos z}{z^2 - 1} dz$,

(2) $I_2 = \int_{C_2} \left(\dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{(z+\pi)} \right) \sin z \, dz$.

3．次のベキ級数の収束半径を求めよ．（各10点）

(1) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{n} (z - \alpha)^n$

(2) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^n} (z - \alpha)^n$

4．次の関数 $f(z)$ を指定された点 α を中心としてテイラー展開せよ．（各10点）

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z+1}\ \ (\alpha = i)$

(2) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 1}\ \ (\alpha = i)$

5．次の関数を指定された領域でローラン展開せよ．（各10点）

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z+i}\ \ (|z| > 1)$

(2) $f(z) = z e^{1/z^2}\ \ (|z| > 0)$

応用解析定期試験16.01.26解答

１．次の複素積分を求めよ．（各10点）

(1) $I_1=\int_{C_1}\mathrm{Im}\,z\,dz,\ C_1: z=t+i\ (t:0\to 1)$ は2点 $i, 1+i$ を結ぶ線分．

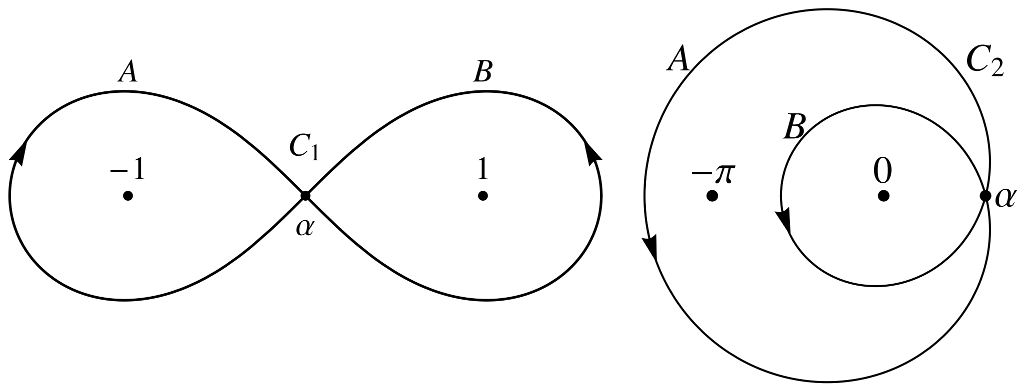
$$I_1=\int_{C_1}\mathrm{Im}\,z\,dz=\int_0^1 \underbrace{1}_{\mathrm{Im}\,z}\underbrace{1}_{z'(t)}\,dt=\int_0^1 dt=1\,.$$

(2) $I_2=\int_{C_2}e^z\,dz,\ C_2: z=1+it\ (t:0\to\pi)$ は2点 $1, 1+\pi i$ を結ぶ線分．

$$I_2=\int_{C_2}e^z\,dz=\int_0^\pi \underbrace{e^{1+it}}_{z(t)}\underbrace{i}_{z'(t)}\,dt=ie\int_0^\pi e^{it}\,dt=ie\left[\frac{1}{i}e^{it}\right]_0^\pi=e(-1-1)=-2e\,.$$

（別解） $f(z)=e^z$ は正則なので， $I_2=\int_{C_2}e^z\,dz=F(1+\pi i)-F(1)=e^{1+\pi i}-e^1=-e-e=-2e.$

２．下図の積分路につき，複素積分値を求めよ．（各10点）



(1) $I_1=\int_{C_1}\dfrac{2\cos z}{z^2-1}dz$． C_1 を交点 α で単純閉曲線 A, B に分け， $C_1=A+B$ とする． A は -1 を負の向きに囲い， 1を囲わない． B は1を正の向きに囲い， -1 を囲わない． $f(z)=\cos z$ は正則であるから，

$\dfrac{2}{z^2-1}=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z+1}$ により，

$$\begin{aligned}I_1&=\int_A+\int_B=\left\{\int_A\frac{f(z)}{z-1}dz-\int_A\frac{f(z)}{z+1}dz\right\}+\left\{\int_B\frac{f(z)}{z-1}dz-\int_B\frac{f(z)}{z+1}dz\right\}\\&=\{0-(-2\pi i\,f(-1))\}+\{2\pi i\,f(1)-0\}=2\pi i\cos(-1)+2\pi i\cos 1=4\pi i\cos 1.\end{aligned}$$

(2) $I_2=\int_{C_2}\left(\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{(z+\pi)}\right)\sin z\,dz$． C_2 を交点 α で単純閉曲線 A, B に分け， $C_2=A+B$ とする． A は2点 $0, -\pi$ を正の向きに囲い， B は1点0のみを正の向きに囲う． $f(z)=\sin z$ は正則であるから，

$$\begin{aligned}I_2&=\int_A+\int_B=\left\{\int_A\frac{f(z)}{z^2}dz+\int_A\frac{f(z)}{z+\pi}dz\right\}+\left\{\int_B\frac{f(z)}{z^2}dz+\int_B\frac{f(z)}{z+\pi}dz\right\}\\&=\{2\pi i\,f'(0)+2\pi i\,f(-\pi)\}+\{2\pi i\,f'(0)-0\}=2\pi i\{\cos 0+\sin(-\pi)+\cos 0\}=4\pi i.\end{aligned}$$

３．次のベキ級数の収束半径を求めよ．（各10点）

(1) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}(z-\alpha)^n$． 係数 $c_n=\dfrac{2^n}{n}$ ゆえ，ダランベールの公式より，

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}/(n+1)}{2^n/n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+n^{-1}}=2. \quad \therefore R=\frac{1}{2}.$$

(2) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^n}(z-\alpha)^n$．係数 $c_n=\frac{1}{n^n}$ ゆえ，コーシー・アダマールの公式より，

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n^n}\right|^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0. \quad \therefore R=\infty.$$

４．次の関数 $f(z)$ を指定された点 α を中心としてテイラー展開せよ．（各10点）

(1) $f(z)=\frac{1}{z+1}$ $(\alpha=i)$．

$$f(z)=\frac{1}{(z-i)+(1+i)}=\frac{1}{1+i}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{1+i}\right)}=\frac{1}{1+i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{1+i}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(1+i)^{k+1}}(z-i)^k.$$

(2) $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ $(\alpha=i)$．部分分数分解 $f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)$ による．まず，

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-i)-(1-i)}=\frac{-1}{1-i}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z-i}{1-i}\right)}=\frac{-1}{1-i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{(1-i)^{k+1}}(z-i)^k.$$

これと(1)より，

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{(1-i)^{k+1}}(z-i)^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(1+i)^{k+1}}(z-i)^k\right)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{(1-i)^{k+1}}-\frac{(-1)^k}{(1+i)^{k+1}}\right)(z-i)^k.\end{aligned}$$

５．次の関数を指定された領域でローラン展開せよ．（各10点）

(1) $f(z)=\frac{1}{z+i}$ $(|z|>1)$

$$f(z)=\frac{1}{z-(-i)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-i}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-i}{z}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-i)^k z^{-k-1}=\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}(-i)^{k-1}z^{-k}}_{\text{主要部}}.$$

(2) $f(z)=ze^{1/z^2}$ $(|z|>0)$

$$f(z)=z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(z^{-2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^{-2k+1}=\underbrace{z}_{\text{正則部}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}z^{-2k+1}}_{\text{主要部}}$$