授業コード：72370-001, 73307-001	参照物：ノート，教科書	回収：解答用紙のみ

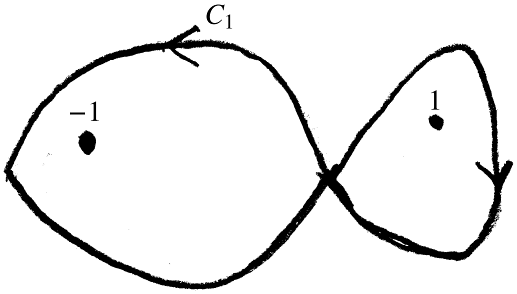
応用解析定期試験'15.01.27

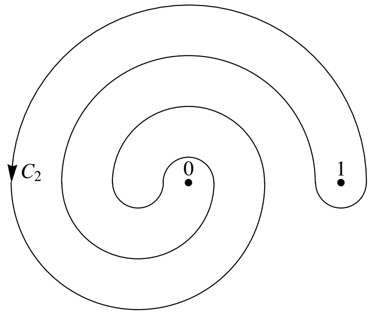
1．次の複素積分を求めよ．（各10点）

(1) $I_1 = \int_{C_1} \overline{z}\, dz$，　$C_1 : z = e^{it}$ $(t : 0 \to \pi)$ は原点0を中心とする半径1の半円．

(2) $I_2 = \int_{C_2} \sin z\, dz$，　$C_2 : z = it$ $(t : 0 \to 1)$ は2点 $0, i$ を結ぶ線分．

2．下図の積分路につき，複素積分値を求めよ．（各10点）





(1) $I_1 = \int_{C_1} \dfrac{e^z}{z^2 - 1} dz$，　　(2) $I_2 = \int_{C_2} \left(\dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{(z-1)^2} \right) \sin z\, dz$．

3．次のベキ級数の収束半径を求めよ．（各10点）

(1) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}(z-\alpha)^n$　　(2) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} (z-\alpha)^n$, $\binom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$

4．次の関数 $f(z)$ を指定された点 α を中心としてテイラー展開せよ．（各10点）

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z}$　$(\alpha = -1)$　　(2) $f(z) = ze^{-z^2}$　$(\alpha = 0)$

5．次の関数を指定された領域でローラン展開せよ．（各10点）

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z+i}$ $(|z| > 1)$　　(2) $f(z) = z^3 \sin \dfrac{1}{z}$ $(|z| > 0)$

応用解析定期試験解答

１．次の複素積分を求めよ．（各10点）

(1) $I_1=\int_{C_1}\overline{z}\,dz$， $C_1: z=e^{it}\ \ (t:0\to\pi)$ は原点0を中心とする半径1の半円.

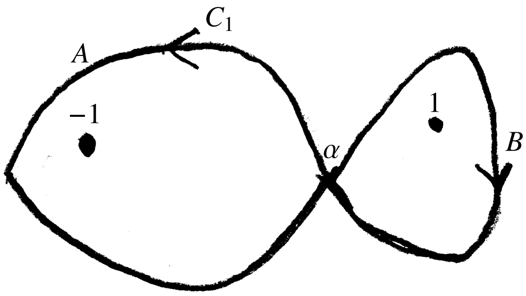
$$I_1=\int_{C_1}\overline{z}\,dz=\int_0^{\pi}\underbrace{e^{-it}}_{\overline{z(t)}}\underbrace{ie^{it}}_{z'(t)}dt=i\int_0^{\pi}dt=\pi i\ .$$

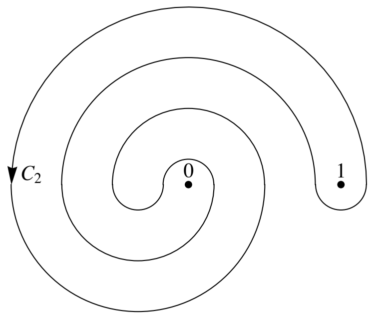
(2) $I_2=\int_{C_2}\sin z\,dz$， $C_2: z=it\ \ (t:0\to 1)$ は2点 $0, i$ を結ぶ線分.

$$I_2=\int_{C_2}\sin z\,dz=\int_0^1\underbrace{\sin it}_{\sin z(t)}\ \underbrace{i}_{z'(t)}\ dt=i\int_0^1\sin it\,dt=i\left[\frac{1}{i}(-\cos it)\right]_0^1=\cos 0-\cos i=1-\cosh 1.$$

［別解］ $\sin z$ の原始関数 $-\cos z$ により， $I_2=\int_{C_2}\sin z\,dz=\left[-\cos z\right]_0^i=\cos 0-\cos i=1-\cosh 1$.

２．下図の積分路につき，複素積分値を求めよ．（各10点）





(1) $I_1=\int_{C_1}\frac{e^z}{z^2-1}dz$．部分分数分解 $\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)$ を行う.

交点 α で曲線を分割し， $C_1=A+B$ とする．点 $z=-1$ を A は正の向きに1周， B は $z=1$ を負の向きに1周している．点 $z=-1$ は B の外部，点 $z=1$ は A の外部である．ゆえに，コーシーの積分定理とコーシーの積分公式より，

$$\begin{aligned}
I_1&=\int_{C_1}\frac{e^z}{z^2-1}dz=\frac{1}{2}\int_{C_1}\frac{e^z}{z-1}dz-\frac{1}{2}\int_{C_1}\frac{e^z}{z+1}dz\\
&=\frac{1}{2}\underbrace{\int_A\frac{e^z}{z-1}dz}_{0}+\frac{1}{2}\underbrace{\int_B\frac{e^z}{z-1}dz}_{-2\pi ie^1}-\frac{1}{2}\underbrace{\int_A\frac{e^z}{z+1}dz}_{2\pi ie^{-1}}-\frac{1}{2}\underbrace{\int_B\frac{e^z}{z+1}dz}_{0}\ .\\
&=0+\frac{1}{2}\left(-2\pi ie^1\right)-\frac{1}{2}\left(2\pi ie^{-1}\right)-0=-\pi i\left(e+e^{-1}\right).
\end{aligned}$$

(2) $I_2=\int_{C_2}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{(z-1)^2}\right)\sin z\,dz$.

点0は C_2 の外部だから，コーシーの積分定理より， $\int_{c_2}\frac{\sin z}{z^2}dz=0$ である．点1は点0は C_2 の内部だから，コーシーの積分公式より， $\int_{c_2}\frac{\sin z}{(z-1)^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}\cos 1=2\pi i\cos 1$．以上より，

$$I_2=\int_{C_2}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{(z-1)^2}\right)\sin z\,dz=0+2\pi i\cos 1=2\pi i\cos 1\,.$$

３．次のベキ級数の収束半径を求めよ．（各10点）

(1) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}(z-\alpha)^n$

係数 $c_n=\sqrt{n+1}$ ゆえ，ダランベールの公式より，

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+2/n}{1+1/n}}=1\,.\quad\therefore R=1\,.$$

(2) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}(z-\alpha)^n$, $\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}$

係数 $c_n=\frac{(2n)!}{n!n!}$ ゆえ，ダランベールの公式より，

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\cdot\frac{n!n!}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2+2/n)(2+1/n)}{(1+1/n)(1+1/n)}=4.\quad\therefore R=\frac{1}{4}.$$

４．次の関数 $f(z)$ を指定された点 α を中心としてテイラー展開せよ．（各10点）

(1) $f(z)=\frac{1}{z}\quad(\alpha=-1)$

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)-1}=-\frac{1}{1-(z+1)}=-\sum_{k=0}^{\infty}(z+1)^k\,.$$

(2) $f(z)=ze^{-z^2}\quad(\alpha=0)$

$$f(z)=z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{k!}=z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z^2)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}z^{2k+1}\,.$$

５．次の関数を指定された領域でローラン展開せよ．（各10点）

(1) $f(z)=\frac{1}{z+i}\ (|z|>1)$

$$f(z)=\frac{1}{z-(-i)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-i}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-i}{z}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-i)^k z^{-k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}(-i)^{k-1}z^{-k}\,.$$

(2) $f(z)=z^3\sin\frac{1}{z}\ (|z|>0)$

$$f(z)=z^3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2k+1}=z^2-\frac{1}{3!}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{-2k+2}=z^2-\frac{1}{3!}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+3)!}z^{-2k}\,.$$