# 応用解析 第９回 複素積分

## １．曲線

**複素関数論の「曲線」は向きのある曲線である．**

△ $C:\alpha \to \beta$ ：$\alpha$ を始点，$\beta$ を終点とする曲線(図1).

図1 曲線C

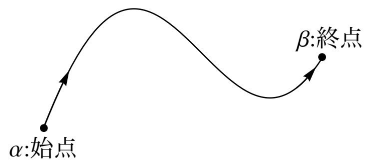
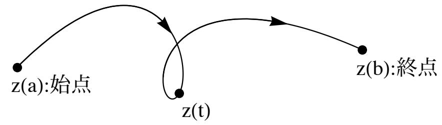



図2 曲線Cのパラメタ表示




△ $C:z=z(t)\ \ (t:a\to b)$ (曲線のパラメタ表示)：実変数 $t$ が $a$ から $b$ まで動いたときの点 $z(t)=x(t)+iy(t)$ の軌跡．始点 $z(a)$，終点 $z(b)$ (図2).

［例1］ $xy$ 平面の曲線 $C$ のパラメタ表示 $C:(x,y)=(x(t),y(t))\ \ (a\le t\le b)$ から直ちに複素平面上の曲線 $C:z=x(t)+iy(t)\ \ (t:a\to b)$ が得られる． $t:a\to b$ で方向が導入されたことに注意．複素平面上の単位円 $C:z=e^{it}=\cos t+i\sin t\ \ (t:0\to 2\pi)$ を図3に示す.

図3 単位円

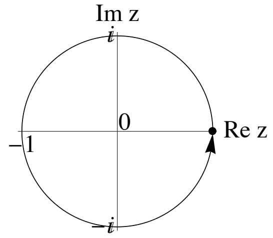



図4 曲線の和

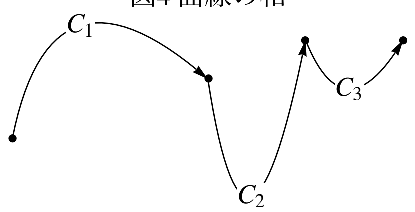
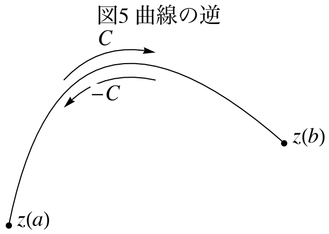



図5 曲線の逆




△ 曲線の和 $C=C_1+C_2+\cdots+C_n$ ：複数の曲線の終点と始点を順につないだもの(図4).

$C_1:\alpha_0\to\alpha_1,\ C_2:\alpha_1\to\alpha_2,\ \cdots,\ C_n:\alpha_{n-1}\to\alpha_n$ を順につないで出来た曲線 $C:\alpha_0\to\alpha_n$ のこと.

△ $-C$ ：曲線 $C$ の向きをひっくり返した曲線.

$C:\alpha\to\beta$ に対して，$-C:\beta\to\alpha$ ． $C:z=z(t)\ \ (t:a\to b)$ に対して，$-C:z=z(t)\ \ (t:b\to a)$ .

△ 滑らかな曲線：上の $z(t)$ が連続微分可能( $x(t),y(t)$ が連続微分可能)で $z'(t)\neq 0$ を満たす． $z'(t)\neq 0$ は「止まらないで動き続ける」こと.

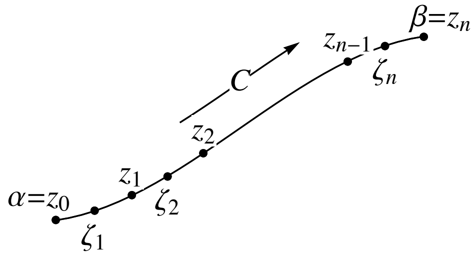
△ 区分的に滑らかな曲線：複数の滑らかな曲線の和.

△ 単純(単一)曲線：同じ点を2度通過しない曲線．始点と終点が一致することは許す.

図1, 3, 4, 5は単純．図2は単純でない.

△ 閉曲線：始点と終点が一致する曲線．図3は閉曲線.

図6 点配置




## ２．複素積分

△ $f(z)$ の曲線 $C:\alpha\to\beta$ 上の積分：

$$I=\int_C f(z)\,dz=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(z_i-z_{i-1})\,.$$

ここで，$\alpha=z_0,z_1,\cdots,z_n=\beta$ は $C$ 上の点列． $\zeta_i$ は弧 $\overset{\frown}{z_{i-1}z_i}$ 上の点． $n\to\infty$ で $z_i-z_{i-1}\to 0$ とする(図6).

☆ (線形性)

$$\int_C \{\alpha f(z)+\beta g(z)\}dz=\alpha\int_C f(z)dz+\beta\int_C g(z)dz\,. \quad //$$

☆ (曲線の和)

$$\int_{C_1+C_2+\cdots+C_n} f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz+\cdots+\int_{C_n} f(z)dz\,. \quad //$$

☆ (曲線の逆) $\int_{-C} f(z)dz=-\int_C f(z)dz$． //

## 3．積分値の計算

［定理1］滑らかな曲線 $C:z=z(t)$ $(t:a\to b)$ 上の複素積分は

$$\int_C f(z)dz=\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\,. \quad //$$

［例2］ $\alpha=2+i$ と $\beta=4+2i$ を結ぶ直線， $L:z=(2+i)t$ $(t:1\to 2)$ で $I=\int_L z^2\,dz$ の値.

$$I=\int_L z^2\,dz=\int_1^2 \underbrace{(2+i)^2t^2}_{z(t)^2}\underbrace{(2+i)}_{z'(t)}dt=(2+i)^3\int_1^2 t^2\,dt=\frac{7}{3}(2+i)^3=\frac{7}{3}(2+11i).//$$

［例3］単位円 $C:z=e^{it}$ $(t:0\to 2\pi)$ で $I=\int_C \frac{dz}{z}$ .

$$I=\int_C \frac{dz}{z}=\int_C z^{-1}\,dz=\int_0^{2\pi} \underbrace{e^{-it}}_{z(t)^{-1}}\underbrace{ie^{it}}_{z'(t)}dt=i\int_0^{2\pi} dt=2\pi i.//$$

［定理2］領域 $D$ で $f(z)=F'(z)$ となる $F(z)$ (原始関数)が存在するなら， $D$ 内の曲線 $C:\alpha\to\beta$ で,

$$\int_C f(z)dz=F(\beta)-F(\alpha)\,. \quad //$$

［例4］半円 $C:z=e^{it}$ $(t:0\to\pi)$ で $I=\int_C e^z\,dz$． $\left(e^z\right)'=e^z$ より， $e^z$ の原始関数は $e^z$． $C$ の始点は $\alpha=e^{i0}=1$，終点は $\beta=e^{\pi i}=-1$ ゆえ,

$$I=\int_C e^z\,dz=F(\beta)-F(\alpha)=e^{-1}-e^1=\frac{1}{e}-e.//$$

△ 滑らかな曲線 $C:(x,y)=(x(t),y(t))$ $(a\le t\le b)$ の長さ： $L=\int_C |dz|=\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$ .

### 第9回練習問題

1. 教科書8.1 曲線 $C:z=t+it^2$ $(t:0\to 1)$ を作図し， $I=\int_C \overline{z}\,dz$ を計算する．ヒント：例2．定理1.

2. $C:z=e^{it}$ $(t:\pi\to 0)$ を作図し， $I=\int_C \sin z\,dz$ を求める．ヒント：例4．定理2.

# 第9回練習問題

1. 教科書8.1 曲線 $C: z = t + it^2 \ (t: 0 \to 1)$ を作図し，$I = \int_C \overline{z}\,dz$ を計算する．ヒント：例2．定理1．

2. $C: z = e^{it} \ (t: \pi \to 0)$ を作図し，$I = \int_C \sin z\,dz$ を求める．ヒント：例4．定理2．

解答

１．$z'(t) = 1 + 2it$ より，

$$I = \int_C \overline{z}\,dz = \int_0^1 \overline{z(t)} z'(t)\,dt = \int_0^1 \overline{(t + it^2)}(1 + 2it)\,dt = \int_0^1 (t - it^2)(1 + 2it)\,dt$$
$$= \int_0^1 (t - it^2 + 2it^2 + 2t^3)\,dt \underset{\text{項別積分}}{=} \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{2i}{3} + \frac{2}{4} = 1 + \frac{i}{3}.$$

2. 曲線 $C$ の始点は $\alpha = z(\pi) = e^{i\pi} = -1$．終点は $\beta = z(0) = e^{i0} = 1$．また，$x \in D = \mathbb{C}$ で $f(z) = \sin z$ の原始関数は $F(z) = -\cos z$ である $(\because F'(z) = f(z))$．ゆえに，定理2より，

$$\int_C f(z)\,dz = F(\beta) - F(\alpha) = -\cos 1 + \cos(-1) = -\cos 1 + \cos 1 = 0.$$

＜ノート＞

（定理1の説明）$z(t_i) - z(t_{i-1}) = z'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) + o(t_i - t_{i-1}) \cong z'(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$ だから，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\big(z(\tau_i)\big) z'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\big(z(\tau_i)\big)(z(t_i) - z(t_{i-1})) = \int_a^b f\big(z(t)\big) z'(t)\,dt\ .\ //$$

（定理2の証明）$C: z(t) \ (t: a \to b),\ \alpha = z(a),\ \beta = z(b)$ とすると，

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f\big(z(t)\big) z'(t)\,dt = \int_a^b \underbrace{F'\big(z(t)\big) z'(t)}_{\frac{d}{dt}F(z(t))}\,dt$$
$$= \int_a^b \frac{d}{dt} F\big(z(t)\big)\,dt = F\big(z(b)\big) - F\big(z(a)\big) = F(\beta) - F(\alpha).//$$