# 応用解析 第7回 調和関数

## 1．調和関数

△ $u(x,y)$ は調和関数 $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ $u$ はLaplace(ラプラス)方程式 $u_{xx}+u_{yy}=0$ を満たす.

［例1］二次元静電場の電位 $V(x,y)$ (図1). 非圧縮完全流体の速度ポテンシャル $\phi(x,y)$ と流れ関数 $\psi(x,y)$ (図2). 定常状態の二次元温度分布 $T(x,y)$. これらはみな調和関数.

図1はコンデンサの作る電位 $V(x,y)$ の等電位線と電気力線. 等電位線と電気力線は直交する. よって, 電気力線は $V(x,y)$ の共役調和関数(後述)の等高線である.

図2は円筒回りを左から右へ流れる非圧縮完全流体の速度ポテンシャル $\phi(x,y)$ と流れ関数 $\psi(x,y)$ の等高線. $\psi(x,y)$ は $\phi(x,y)$ の共役調和関数. $\psi(x,y)$ の等高線は流線で, $\phi(x,y)$ の等高線と直交.

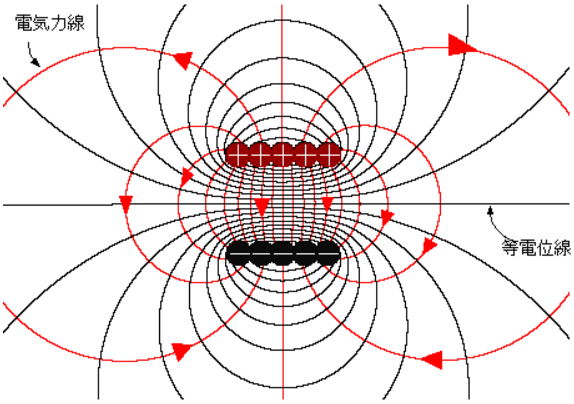


図1. $V(x,y)$ の等高線(等電位線)と電気力線.

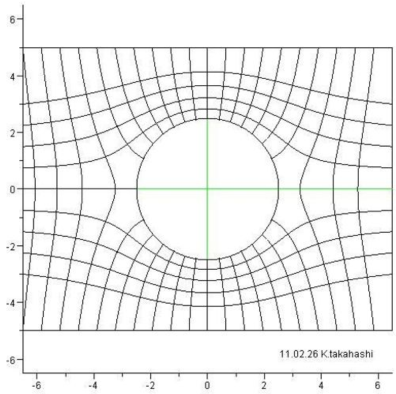


図2. $\phi(x,y)$ と $\psi(x,y)$ の等高線.

［定理1］ 正則関数 $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ の実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ は調和関数.

（証明）C-R(Cauchy-Riemannの方程式）： $u_x=v_y\cdots$①, $v_x=-u_y\cdots$② より,

$$u_{xx}=(u_x)_x\overset{①}{=}(v_y)_x=v_{yx}=v_{xy}=(v_x)_y\overset{②}{=}(-u_y)_y=-u_{yy}.\quad \therefore u_{xx}+u_{yy}=0.$$

$$v_{xx}=(v_x)_x\overset{②}{=}(-u_y)_x=-u_{yx}=-u_{xy}=(-u_x)_y\overset{①}{=}(-v_y)_y=-v_{yy}.\quad \therefore v_{xx}+v_{yy}=0.\ //$$

△ $v(x,y)$ は $u(x,y)$ の共役調和関数 $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ $u,v$ はC-Rをみたす. $\Leftrightarrow$ $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ は正則.

［定理2］調和関数 $u(x,y)$ の共役調和関数は定数を除いて一意に決まる.

（証明） $v$, $w$ が共に $u$ の共役調和関数とし, $g=w-v$ とすると, C-Rより,

$$g_x=w_x-v_x=(-u_y)-(-u_y)=0,\ g_y=w_y-v_y=u_x-u_x=0.$$

ゆえに, $g$ は $x$ 方向にも, $y$ 方向にも変化しない. ゆえに $g$ は定数. //

☆ $v$ が調和関数 $u$ の共役調和関数なら, $u$ の全ての調和関数は $v+c$ （$c$ は定数)と書ける.

［例2］調和性の判定と，共役調和関数の計算.

$u(x,y)=x^2-y^2+x$ が(1)調和関数であることを示し，(2)その共役調和関数を求める.

(1) Laplace方程式を満たすことを示す.

$$u_x=2x+1,\ u_{xx}=2,\ u_y=-2y,\ u_{yy}=-2.\ \therefore u_{xx}+u_{yy}=0.$$

ゆえに，$u$ は調和関数.

(2) C-Rと(1)より，$v$ の偏導関数を計算：

$$v_x=-u_y=2y\cdots①\qquad v_y=u_x=2x+1\cdots②$$

①の $v_x$ を $x$ で積分( $y$ は定数と考える)：$\left(v(x,y)=v(a,y)+\int_a^x v_x(t,y)dt=p(y)+\int v_x(x,y)dx\right)$

$$v=2xy+p(y)\cdots③\quad (\ P(y)\ \text{は}\ y\ \text{のみの関数}).$$

③を $y$ で微分：$v_y=2x+p'(y)$，これを②と比較して，

$$p'(y)=1.\ \therefore p(y)=y+c\quad (\ c\ \text{は定数}).$$

③に代入して，解は $\underline{\underline{v=2xy+y+c}}$．//

## 2．正則関数の等角性

［定理１］(正則関数の等角性) $w=f(z)$ は正則で点 $\alpha$ で $f'(\alpha)\neq 0$ とする．このとき，$w=f(z)$ は $\alpha$ で交わる2曲線の交角を方向を込めて変えない．//

（証明）$\beta=f(\alpha),\ f'(\alpha)=re^{i\theta}\neq 0$ と極表示すると，$\alpha$ の近傍で

$$w\cong \underbrace{f(\alpha)}_{\beta}+\underbrace{f'(\alpha)}_{re^{i\theta}}(z-\alpha)=\underbrace{r}_{r\text{倍}}\underbrace{e^{i\theta}}_{\theta\text{回転}}z+\underbrace{\gamma}_{\text{平行移動}}\qquad (\gamma=\beta-r\alpha e^{i\theta}).$$

したがって，$z$ 平面で $\alpha$ 近傍の図形は，$r$ 倍され $\theta$ 回転され $\gamma$ 平行移動されて，同じ向きの相似図形として，$w$ 平面の $\beta$ 近傍に移される．ゆえに，$\alpha$ で交わる2曲線の交角を方向を込めて変えない．//

［定理2］$u_x(a,b)$ と $u_y(a,b)$ が同時に0にならないなら，調和関数 $u(x,y)$ と共役調和関数 $v(x,y)$ の等高線は点 $(a,b)$ で直交する．//

（証明）$xy$ 平面を $z=x+iy$ で $z$ 平面と見なす．条件より $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ は正則である．点 $(a,b)$ を通る等高線 $C_u:u(x,y)=u(a,b)$ と $C_v:v(x,y)=v(a,b)$ を考える．$C_u$ は，$w=f(z)$ で $w$ 平面の実部が定数 $u(a,b)$ の直線(虚軸に平行な直線) $L_u$ に写る．同じく $C_v$ は，$w=f(z)$ で $w$ 平面の虚部が定数 $v(a,b)$ の直線(実軸に平行な直線) $L_v$ に写る．像 $L_u$ と $L_v$ は明らかに直交するので，定理1より原像 $C_u$ と $C_v$ も直交する．//

### 第7回練習問題

教科書7.1 次の関数が調和関数であることを示し，その共役調和関数を求めよ.

(a) $u(x,y)=y^3-3x^2y$，(b) $u(x,y)=e^x\cos y$

## 第7回練習問題

教科書7.1 次の関数が調和関数であることを示し，その共役調和関数を求めよ.

(a) $u(x,y)=y^3-3x^2y$， (b) $u(x,y)=e^x\cos y$

解答

(a)

(1) Laplace方程式を満たすことを示す.

$$u_x=-6xy,\ u_{xx}=-6y,\ u_y=3y^2-3x^2,\ u_{yy}=6y.\ \therefore u_{xx}+u_{yy}=0.$$

ゆえに，$u$ は調和関数.

(2) C-Rと(1)より，$v$ の偏導関数を計算：

$$v_x=-u_y=3x^2-3y^2\cdots①\qquad v_y=u_x=-6xy\cdots②$$

①の $v_x$ を $x$ で積分( $y$ は定数と考える)：

$$v=x^3-3xy^2+p(y)\cdots③\quad (\ P(y)\ \text{は}\ y\ \text{のみの関数}).$$

③を $y$ で微分：$v_y=-6xy+p'(y)$，これを②と比較して，

$$p'(y)=0.\ \therefore p(y)=c\ (\ c\ \text{は定数}).$$

③に代入して，解は $\underline{\underline{v=x^3-3xy^2+c}}$．//

(b)

(1) Laplace方程式を満たすことを示す.

$$u_x=e^x\cos y,\ u_{xx}=e^x\cos y,\ u_y=-e^x\sin y,\ u_{yy}=-e^x\cos y.\ \therefore u_{xx}+u_{yy}=0.$$

ゆえに，$u$ は調和関数.

(2) C-Rと(1)より，$v$ の偏導関数を計算：

$$v_x=-u_y=e^x\sin y\cdots①\qquad v_y=u_x=e^x\cos y\cdots②$$

①の $v_x$ を $x$ で積分( $y$ は定数と考える)：

$$v=e^x\sin y+p(y)\cdots③\quad (\ P(y)\ \text{は}\ y\ \text{のみの関数}).$$

③を $y$ で微分：$v_y=e^x\cos y+p'(y)$，これを②と比較して，

$$p'(y)=0.\ \therefore p(y)=c\ (\ c\ \text{は定数}).$$

③に代入して，解は $v=e^x\sin y+c$．//