応用解析 第6回 複素微分

1．極限と連続

△ $\displaystyle\lim_{z\to\alpha} f(z)=\beta \overset{def.}{\Leftrightarrow} \lim_{|z-\alpha|\to 0}|f(z)-\beta|=0$　（ご存知，実数の lim で定義）．

△ $f(z)$ が $z=\alpha$ で連続 $\overset{def.}{\Leftrightarrow} \displaystyle\lim_{z\to\alpha} f(z)=f(\alpha)$．

注：「命題a $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ 命題b」は命題aが命題bで定義(define)されることを表す．

2．微分と導関数

△ $\displaystyle f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{w\to z}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}$　（接近経路に依らず極限が存在）．

△ $f(z)$ が $z=\alpha$ で正則 $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ $f(z)$ は $z=\alpha$ の近傍で微分可能．

$\Leftrightarrow$ ある $\varepsilon>0$ について，$|z-\alpha|<\varepsilon$ なら $f'(z)$ が存在する．

［例1］ $f(z)=z^2$ は正則．$\because \left(z^2\right)'=\displaystyle\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z(2z+\Delta z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z$． //

［例2］ $f(z)=\overline{z}$ は非正則．なぜなら，$\Delta z=re^{i\theta}$ と置くと，

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\overline{z+\Delta z}-\overline{z}}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}}=e^{-2i\theta}$$

の $r\to 0$ における極限値は接近方向 θ に依存する（極限が接近経路に依存)．//

☆ $|z|$, $\mathrm{Re}\,z$, $\mathrm{Im}\,z$ も正則ではない．//

3．導関数の公式（実関数の微分公式と同じ）

☆1 関数の四則と導関数：

$$(f\pm g)'=f'\pm g',\ (fg)'=f'g+fg',\ \left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{-f'}{f^2},\ \left(\frac{g}{f}\right)'=\frac{fg'-f'g}{f^2}．\ //$$

☆2 合成関数の微分：$\displaystyle\frac{d}{dz}f(g(z))=f'(g(z))g'(z)$． //

☆3 逆関数の微分：$\displaystyle\frac{d}{dz}f^{-1}(z)=\frac{1}{f'(f^{-1}(z))}$． //

以上☆1，☆2，☆3の証明は，実関数の場合とまったく同じ．

4．コーシー・リーマン(Cauchy-Riemann)の関係式

複素微分可能な関数の実部と虚部の関係．複素関数 $f(z)$ を

$$f(z)=f(x+iy)=\underbrace{u(x,y)}_{\text{実部}}+i\,\underbrace{v(x,y)}_{\text{虚部}}$$

と書く．

［定理］(Cauchy-Riemann) $f(z)$ が正則であることと，偏導関数 u_x, u_y, v_x, v_y が次の関係式(Cauchy-Riemannの関係式，C-Rと略記)を満たすことは同値．

$$u_x = v_y,\ v_x = -u_y\ . \quad // \qquad \text{C-R}$$

（証明）ここでは，$f(z)$ の正則性を仮定してC-Rを示す．以下で，$h \in \mathbb{R}$ である．
$f'(z)$ が存在するので，実軸方向の極限により，

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h}\right) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)\ . \tag{1}$$

また，虚軸方向の極限により

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+ih)-f(z)}{ih} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{ih} + i\frac{v(x,y+h)-v(x,y)}{ih}\right) = -iu_y(x,y) + v_y(x,y)\ . \tag{2}$$

二つの極限は等しいので，両辺の実部虚部を比較して，C-Rを得る．//
［系］ $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) - iu_y(x,y)$ ． //

［例1］(1) z^2，(2) e^z の正則性を示し，その微分を求める．

(1) $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$ より，実部 $u(x,y) = x^2 - y^2$，虚部 $v(x,y) = 2xy$ ．

$$u_x = 2x = v_y,\ v_x = 2y = -u_y$$

より，C-Rを満たすので正則． $\left(z^2\right)' = u_x + iv_x = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z$ ．

(2) $e^z = e^x\cos y + ie^x\sin y$ より，実部 $u(x,y) = e^x\cos y$, $v(x,y) = e^x\sin y$ ．

$$u_x = e^x\cos y = v_y,\ v_x = e^x\sin y = -u_y$$

より，C-Rを満たすので正則． $\left(e^z\right)' = u_x + iv_x = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^z$ ．

［例2］(1) $f(z) = \bar{z}$，(2) $f(z) = |z|$ が正則でないことを示す．//

(1) $f(z) = \bar{z} = x - iy$ より， $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$ ． $u_x = 1 \neq -1 = v_y$ ゆえ，C-Rを満たさないので非正則．//

(2) $f(z) = \sqrt{x^2+y^2}$ より， $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y) = 0$ ． $u_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0 = v_y$ ゆえ，C-Rを満たさないので非正則．//

練習問題

次の関数がC-Rを満たすことを示し，その微分を求めよ．

(1) $\sin z = \underbrace{\sin x\cosh y}_{u(x,y)} + i\underbrace{\cos x\sinh y}_{v(x,y)}$，(2) $\cos z = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$，(3) $\dfrac{1}{z}$ $(z \neq 0)$．

第6回練習問題

次の関数がC-Rを満たすことを示し，その微分を求めよ．

(1) $\sin z = \underbrace{\sin x \cosh y}_{u(x,y)} + i \underbrace{\cos x \sinh y}_{v(x,y)}$，(2) $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$，(3) $\dfrac{1}{z}$ $(z \neq 0)$．

解答

(1) $u = \sin x \cosh y,\ v = \cos x \sinh y$ より，

$$u_x = \cos x \cosh y,\ u_y = \sin x \sinh y,\ v_x = -\sin x \sinh y,\ v_y = \cos x \cosh y$$

であるから，C-R: $u_x = v_y = \cos x \cosh y,\ v_x = -u_y = -\sin x \sinh y$ を満たす．また，

$$(\sin z)' = u_x + i v_x = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y\ .$$

これは，公式 $(\sin z)' = \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$ と一致する．

(2) $u = \cos x \cosh y, v = -\sin x \sinh y$ より，

$$u_x = -\sin x \cosh y,\ u_y = \cos x \sinh y,\ v_x = -\cos x \sinh y,\ v_y = -\sin x \cosh y$$

であるから，C-R: $u_x = v_y = -\sin x \cosh y,\ v_x = -u_y = -\cos x \sinh y$ を満たす．また，

$$(\cos z)' = u_x + i v_x = -\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y.$$

これは，公式 $(\cos z)' = -\sin z = -(\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y)$ と一致する．

(3) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ より， $u = \dfrac{x}{x^2+y^2},\ v = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ ．

$$u_x = \frac{(x^2+y^2) - x(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ u_y = \frac{-x(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$v_x = -\frac{-y(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ v_y = -\frac{(x^2+y^2) - y(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

であるから，C-R: $u_x = v_y = \dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ v_x = -u_y = \dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ を満たす．また，

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = u_x + i v_x = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + i\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

これは，公式 $\left(\dfrac{1}{z}\right)' = -\dfrac{1}{z^2} = -\dfrac{1}{(x+iy)^2} = -\dfrac{(x-iy)^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2+2ixy}{(x^2+y^2)^2}$ と一致する．

＜ノート＞

（定理の証明）（⇐） $\Delta z = h + ik$ とする．

$$u(x+h, y+k) - u(x,y) = u_x h + u_y k + o(r),$$

$$v(x+h, y+k) - v(x,y) = v_x h + v_y k + o(r),\ r = \sqrt{h^2+k^2}$$

とC-Rより，

$$
\begin{aligned}
f(z+\Delta z)-f(z) &= \{u_x h+u_y k+o(r)\}+i\{v_x h+v_y k+o(r)\} \\
&= (u_x+iv_x)h+(u_y+iv_y)k+o(r) \\
&\overset{\text{C-R}}{=} (u_x+iv_x)h+(-v_x+iu_x)k+o(r) \\
&= (u_x+iv_x)h+(u_x+iv_x)ik+o(r) \\
&= (u_x+iv_x)(h+ik)+o(r) = (u_x+iv_x)\Delta z+o(r).
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \lim_{\Delta z\to\infty}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to\infty}\left(u_x+iv_x+\frac{o(r)}{\Delta z}\right)=u_x+iv_x+\lim_{\Delta z\to\infty}\frac{o(r)}{\Delta z}=u_x+iv_x\,. \quad //
$$