応用解析 第5回 三角関数・双曲線関数

1．三角関数 $\sin z, \cos z, \tan z$

△ 正弦関数： $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \ (|z| < \infty)$

△ 余弦関数： $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \ (|z| < \infty)$

☆1 Eulerの公式： $e^{iz} = \cos z + i \sin z$． //

（証明） $e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos z + i \sin z$． //

☆2 $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$． //

（証明）Eulerの公式より， $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$．辺々足してcos．引いてsin．//

☆3 実部虚部： $\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$, $\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$． //

［例1］ $\cos i = \cos(0+1i) = \cos 0 \cosh 1 - i \sin 0 \sinh 1 = \cosh 1 = (e + e^{-1})/2 \ (>1)$． //

△ 正接関数： $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$． //

注意：加法定理，倍角公式，半角公式など実三角関数の公式(等式)は全て成立．不等式はダメ．

［例2］ $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ は成立． $|\cos z| \le 1$ はダメ．//

2．双曲線関数 $\sinh z, \cosh z, \tanh z$

△ 双曲線正弦関数： $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz$

△ 双曲線余弦関数： $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz$

△ 双曲線正接関数： $\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = -i \tan iz$

☆4 実部虚部： $\sinh(x+iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$, $\cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$． //

☆5 $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$． //

3．逆三角関数 $\sin^{-1} z, \cos^{-1} z, \tan^{-1} z$

△ 逆三角関数： $\sin\left(\sin^{-1} z\right) = z$, $\cos\left(\cos^{-1} z\right) = z$, $\tan\left(\tan^{-1} z\right) = z$ を満たす多価関数(任意性を持つ)．

☆6 $\sin^{-1}$ の任意性：複数ある $\sin^{-1} z$ の一つを α とすると， $\sin^{-1} z = \frac{\pi}{2} \pm \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2n\pi$． //

☆7 $\cos^{-1}$ の任意性：複数ある $\cos^{-1} z$ の一つを α とすると， $\cos^{-1} z = \pm\alpha + 2n\pi$． //

☆8 $\tan^{-1}$ の任意性：複数ある $\tan^{-1} z$ の一つを α とすると， $\tan^{-1} z = \alpha + n\pi$． //

（証明）実三角関数に関する等式は全て成り立つので， $\tan(\alpha + n\pi) = \tan\alpha = z$． //

☆9 $\sin^{-1}z=-i\log\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right),\ \cos^{-1}z=-i\log\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),\ \tan^{-1}z=-\dfrac{i}{2}\log\dfrac{i-z}{i+z}$．//

（証明） $w=\cos^{-1}z$ を求める． $z=\cos w=\dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}=\dfrac{W+W^{-1}}{2}$ $(W=e^{iw})$. $\therefore W^2-2zW+1=0$． W を求めると，2解 $e^{iw}=W=z+\sqrt{z^2-1}$ を得る．

$$\therefore iw=\log\left(z+\sqrt{z^2-1}\right).\ \ \therefore w=\frac{1}{i}\log\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)=-i\log\left(z+\sqrt{z^2-1}\right).\ \ //$$

［例3］ $\cos^{-1}i=-i\log\left(i+\sqrt{i^2-1}\right)$ を実初等関数で表す．☆9で，複素 $\log$，複素 $\sqrt{\ }$ を適当にきめれば，☆7の α が得られる．例えば， $\sqrt{-2}=i\sqrt{2},\log i=\dfrac{1}{2}\pi i$ と決めると，

$$\alpha=-i\log\left(i+\sqrt{i^2-1}\right)=-i\log\left(i+\sqrt{-2}\right)=-i\log\left(i+i\sqrt{2}\right)=-i\log\left\{i\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}$$
$$\overset{\text{対数法則}}{=}-i\left\{\log i+\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}=-i\left\{\frac{1}{2}\pi i+\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}=\frac{1}{2}\pi-i\log\left(\sqrt{2}+1\right).$$

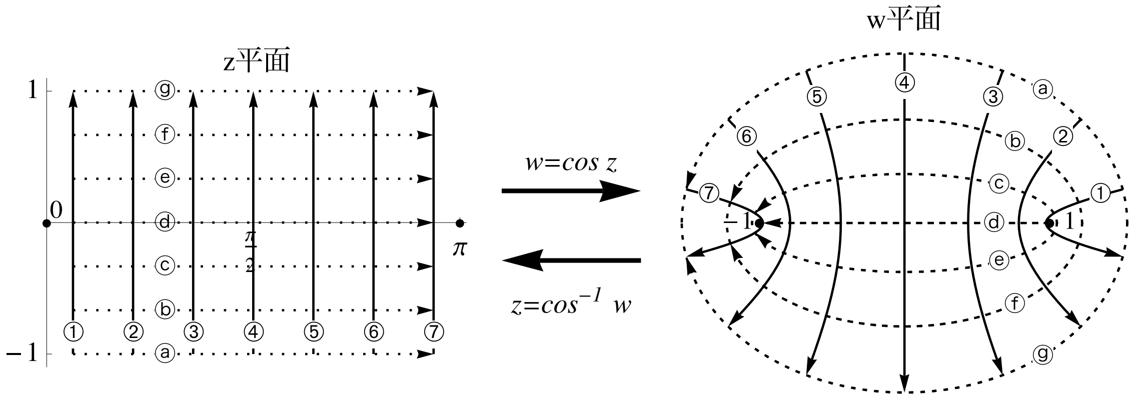
これと☆7より， $\cos^{-1}i=\pm\alpha+2n\pi=\pm\left\{\dfrac{1}{2}\pi-i\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}+2n\pi$．//

4．関数 $w=\cos z$ の像

変換 $w=\cos z,\ z=x+iy,\ w=u+iv$ とする．

z 平面の虚軸に平行な直線 $z=a+it$ $(t:-1\to 1)$ (左図①〜⑦)は， w 平面の $-1,1$ を焦点とする双曲線 $w=\cos a\cosh t-i\sin a\sinh t$ $(t:-1\to 1)$ (右図①〜⑦)に対応する．

z 平面の実軸に平行な直線 $z=t+ib$ $(t:0\to\pi)$ (左図ⓐ〜ⓖ)は， w 平面の $-1,1$ を焦点とする楕円 $w=\cos t\cosh t-i\sin t\sinh b$ $(t:0\to\pi)$ (右図ⓐ〜ⓖ)に対応する．



第5回練習問題

1．p.45 5.1 次の値を実初等関数で書け (1) $\sin i$，(2) $\cos 2i$，(3) $i\tan i$．　ヒント：例1

2．p.45 5.2 次の値を実初等関数で書け (1) $\sin^{-1}2$，(2) $\cos^{-1}2i$．　ヒント：例3

第5回練習問題

１．p.45 5.1 次の値を実初等関数で書け　(1) $\sin i$，(2) $\cos 2i$，(3) $i\tan i$．　　　ヒント：例1

２．p.45 5.2 次の値を実初等関数で書け　(1) $\sin^{-1}2$，(2) $\cos^{-1}2i$．　　　ヒント：例3

解答

１．(1) $\sin i=\sin 0\cosh 1+i\cos 0\sinh 1=i\sinh 1$．

(2) $\cos 2i=\cos 0\cosh 2-i\sin 0\sinh 2=\cosh 2$．

(3) $i\tan i=i\dfrac{\sin i}{\cos i}=i\dfrac{\sin 0\cosh 1+i\cos 0\sinh 1}{\cos 0\cosh 1-i\sin 0\sinh 1}=i\dfrac{i\sinh 1}{\cosh 1}=-\tanh 1$．

2. (1) ☆6の α を決める．☆9より，複数ある $\sin^{-1}2$ の一つは，

$$\begin{aligned}\alpha&=-i\log\left(2i+\sqrt{1-4}\right)=-i\log i\left(2+\sqrt{3}\right)=-i\left\{\log i+\log\left(2+\sqrt{3}\right)\right\}\\&=-i\left\{\frac{1}{2}\pi i+\log\left(2+\sqrt{3}\right)\right\}=\frac{1}{2}\pi-i\log\left(2+\sqrt{3}\right).\end{aligned}$$

よって，$\sin^{-1}2=\dfrac{1}{2}\pi\pm\left\{\dfrac{1}{2}\pi-\alpha\right\}+2n\pi=\dfrac{1}{2}\pi\pm i\log\left(2+\sqrt{3}\right)+2n\pi$．

(2) ☆7の α を決める．☆9より，複数ある $\cos^{-1}2i$ の一つは，

$$\begin{aligned}\alpha&=-i\log\left(2i+\sqrt{(2i)^2-1}\right)=-i\log\left(2i+\sqrt{-5}\right)=-i\log\left(2i+i\sqrt{5}\right)=-i\log i\left(2+\sqrt{5}\right)\\&=-i\left(\log i+\log\left(2+\sqrt{5}\right)\right)=-i\left(\frac{1}{2}\pi i+\log\left(2+\sqrt{5}\right)\right)=\frac{1}{2}\pi-i\log\left(2+\sqrt{5}\right).\end{aligned}$$

より，$\cos^{-1}2i=\pm\alpha+2n\pi=\pm\left(\dfrac{1}{2}\pi-i\log\left(2+\sqrt{5}\right)\right)+2n\pi$．

＜ノート＞

◎§4

$w=u+iv=\cos a\cosh t-i\sin a\sinh t\ \ (t:-1\to 1)$ より，$u=\cos a\cosh t,\ v=-\sin a\sinh t$．ゆえに，

$$\frac{u^2}{\cos^2 a}-\frac{v^2}{\sin^2 a}=\cosh^2 t-\sinh^2 t=1.$$

これは，焦点 $\pm\sqrt{\cos^2 a+\sin^2 a}=\pm 1$ の双曲線の方程式である．$0\le a<\pi/2$ で $u=\cos a\cosh t>0$ ゆえ，双曲線の右半平面側(1,4象限)，$\pi/2<a<\pi$ で $u=\cos a\cosh t<0$ ゆえ，双曲線の左半平面側(2,3象限)となる．

$w=\cos t\cosh t-i\sin t\sinh b\ \ (t:0\to\pi)$ より，$u=\cos t\cosh b,\ v=-\sin t\sinh b$，ゆえに，

$$\frac{u^2}{\cosh^2 a}+\frac{v^2}{\sinh^2 a}=\cos^2 t+\sin^2 t=1.$$

これは，焦点 $\pm\sqrt{\cosh^2 a-\sinh^2 a}=\pm 1$ の楕円の方程式である．$0<t<\pi$ のとき，$b<0$ で $v=-\sin t\sinh b>0$ ゆえ，楕円の上半平面側(1,2象限)，$b>0$ で $v=-\sin t\sinh b<0$ ゆえ，楕円の下半平面側(3,4象限)となる．