応用解析 第4回 指数関数と対数関数

1．指数関数

Maclaurin展開で定義する．指数関数のすべてがここから導かれる．

△ 複素指数関数： $e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\ (|z|<\infty)$　　（実指数関数： $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\ (-\infty<x<\infty)$ ）

☆1 指数法則： $e^{z+w}=e^z e^w$ ． //

（証明） $e^{z+w}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k w^{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}z^k w^{n-k}\right)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\cdot\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\right)\overset{①}{=}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\cdot\frac{w^l}{l!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{w^l}{l!}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{w^l}{l!}\right)=e^z e^w.$$

①の左辺には全ての $\frac{z^k}{k!}\cdot\frac{w^l}{l!}\ (k\ge 0, l\ge 0)$ が一度現れる． //

☆2 Eulerの公式： $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ． //

（証明） $e^{i\theta}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k\theta^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k}\theta^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k+1}\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}=\cos\theta+i\sin\theta$ ． //

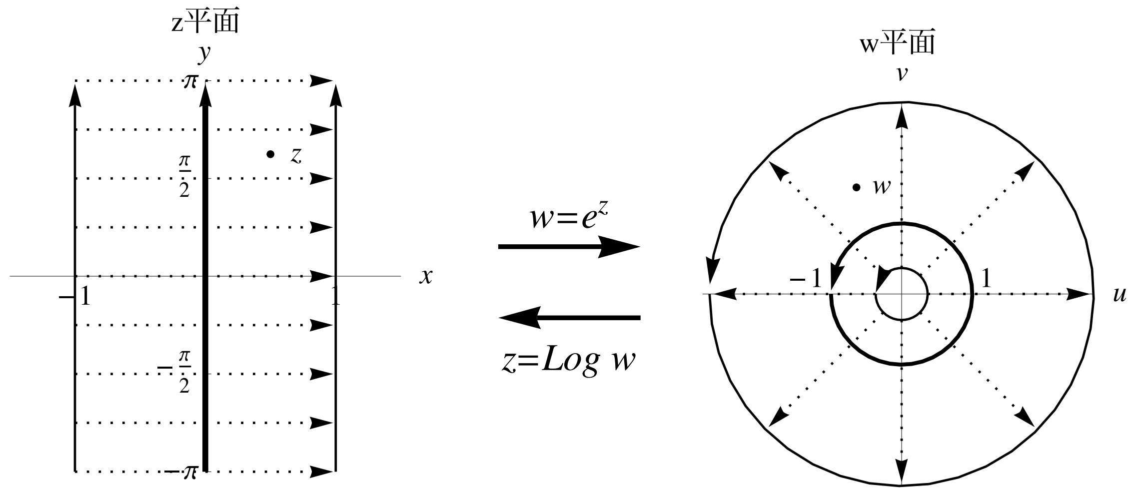
☆3 周期性： $e^{2\pi i}=1$ ．　　（ $\because e^{2n\pi i}=\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi=1$ ）

☆4 周期性： $e^{z+2n\pi i}=e^z$ ．　（ $\because e^{z+2n\pi i}\overset{☆1}{=}e^z e^{2n\pi i}\overset{☆3}{=}e^z$ ）

◎ 極表示： $e^z=e^{x+iy}\overset{☆1}{=}e^x e^{iy}\overset{☆2}{=}e^x(\cos y+i\sin y)$ ． $\therefore |e^z|=e^x,\ \arg e^z=y$ ．

［例1］ $e^{2+\pi i/2}=e^2e^{\pi i/2}=ie^2$, $e^{\log 2+\pi i/3}=e^{\log 2}e^{\pi i/3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+i\sqrt{3}$ ． //

◎ $w=e^z$ の像： z が右に進む⇒ w が原点から離れる． z が上に進む⇒ w が反時計回りに回転．



2．対数関数

△ 複素**対数関数**： $e^w = z$ を満たす複素数 w を， z の対数と言い， $w=\log z$ と書く．

☆1 $\log z = \underbrace{\log|z|}_{\text{実部}} + i\underbrace{\arg z}_{\text{虚部}}$ ．右辺の log は実関数の(高校の) log .

（証明） $e^{\log z} = e^{\log|z| + i\arg z} = e^{\log|z|}e^{i\arg z} = |z|e^{i\arg z} = z$ ． //

注：虚部 $\arg z$ は $2n\pi$ の任意性がある．その場に応じて適切に解釈する．複素対数関数は厳密な意味では関数ではない．

☆2 **対数法則**： $\log\alpha\beta = \log\alpha + \log\beta$.

（証明） $e^{\log\alpha+\log\beta} \overset{\text{指数法則}}{=} e^{\log\alpha}e^{\log\beta} = \alpha\beta$ ．ゆえに， $\log\alpha\beta = \log\alpha + \log\beta$ ． //

［例2］(1) $\log i$, (2) $\log\left(\sqrt{3}-i\right)$ を実初等関数で表す.

(1) ① 絶対値と偏角：$|i|=1,\ \arg i = \dfrac{\pi}{2} + \underbrace{2n\pi}_{\text{任意性}}$ ． ② $\log i = \log 1 + \dfrac{\pi i}{2} + 2n\pi i = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i$.

(2) ① 絶対値と偏角：$\left|\sqrt{3}-i\right| = 2, \arg(\sqrt{3}-i) = -\dfrac{\pi}{6} + \underbrace{2n\pi}_{\text{任意性}}$ ． ② $\log\left(\sqrt{3}-i\right) = \log 2 + \left(-\dfrac{\pi}{6} + 2n\pi\right)i$ ． //

△ 偏角の主値： $\mathrm{Arg}\, z \in (-\pi, \pi]$ ． （計算機言語の arg 関数の定義）

△ 対数関数の主値： $\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i\ \mathrm{Arg}\, z$ ．(計算機言語の複素 log 関数の定義)

☆ 実数 $x>0$ については， $\mathrm{Arg}\, z = 0$ ゆえ， $\mathrm{Log}\, x = \log x$ ．右辺の log は実初等関数(高校の log).

3．べき乗

指数関数と対数関数により，複素数の複素数乗を次のように定義する.

△ $\alpha^\beta = e^{\beta\log\alpha}$ ． （ $\alpha^\beta = \left(e^{\log\alpha}\right)^\beta = e^{\beta\log\alpha}$ と考える．）

注：べき乗は複素 log に由来する任意性がある．その場に応じて適切に解釈する.

［例3］(1) $(1+i)^i$, (2) 2^{1+i} の極表示 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を実初等関数で表す.

(1) ① $\log(1+i) = \log\sqrt{2} + \dfrac{\pi i}{4} + 2n\pi i$ （ $+2n\pi i$ は左辺の複素 log の任意性．右辺の log は実初等関数．）

② $(1+i)^i = e^{i\left(\log\sqrt{2} + \frac{\pi i}{4} + 2n\pi i\right)} = e^{i\log\sqrt{2} - \left(\frac{1}{4}+2n\right)\pi} = e^{-\left(\frac{1}{4}+2n\right)\pi}\left\{\cos\left(\log\sqrt{2}\right) + i\sin\left(\log\sqrt{2}\right)\right\}$.

(2) ① $\log 2 = \log 2 + 2n\pi i$ （ $+2n\pi i$ は左辺の複素 log の任意性．右辺の log は実初等関数．）

② $2^{1+i} = e^{(1+i)(\log 2 + 2n\pi i)} = e^{(\log 2 - 2n\pi) + i(\log 2 + 2n\pi)} = e^{\log 2 - 2n\pi}\left\{\cos(\log 2) + i\sin(\log 2)\right\}$ ． //

練習問題

1．p.37 4.2 次の値を実初等関数で表せ．問題中の $\sqrt{\ }$ は実初等関数である． ヒント：例2

(1) $\log\left(1+i\sqrt{3}\right)$, (2) $\log(1-i)$, (3) $\log(-i)$.

2．p.37 4.3 (1) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{2-3i}$ を実初等関数で表せ．問題中の $\sqrt{\ }$ は実初等関数である． ヒント：例3

第4回解答

練習問題

１．p.37 4.2 次の値を実初等関数で表せ．　ヒント：例2

$$(1)\ \log\left(1+i\sqrt{3}\right),\ (2)\ \log(1-i),\ (3)\ \log(-i).$$

２．p.37 4.3 (1) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{2-3i}$ を実初等関数で表せ．　ヒント：例3

解答：右辺の $\log, \sqrt{\ }$ は実初等関数(高校の $\log, \sqrt{\ }$)

１．(1) ① $\left|1+i\sqrt{3}\right|=2, \arg\,(1+i\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{3}+2n\pi$ ． ② $\log\left(1+i\sqrt{3}\right)=\log 2+\left(\dfrac{\pi}{3}+2n\pi\right)i$.

(2) ① $|1-i|=\sqrt{2}, \arg\,(1-i)=-\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$ ． ② $\log(1-i)=\log\sqrt{2}+\left(-\dfrac{\pi}{4}+2n\pi\right)i$.

(3) ① $|-i|=1, \arg\,(-i)=-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi i$ ． ② $\log(-i)=\log 1+\left(-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)i=\left(-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)i$.

２．① $\left|\sqrt{3}+i\right|=2, \arg\,(\sqrt{3}+i)=\dfrac{\pi}{6}+2n\pi$ より， $\log\left(\sqrt{3}+i\right)=\mathrm{Log}\,2+\left(\dfrac{\pi}{6}+2n\pi\right)i$.

② $\left(\sqrt{3}+i\right)^{2-3i}=e^{(2-3i)\log\left(\sqrt{3}+i\right)}=e^{(2-3i)\left(\log 2+\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right)i\right)}=e^{\left(\frac{\pi}{2}+6n\pi+2\log 2\right)+i\left(\frac{\pi}{3}+4n\pi-3\log 2\right)}$

$$=e^{\left(\frac{\pi}{2}+6n\pi+2\log 2\right)}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}-3\log 2\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-3\log 2\right)\right\}.$$