応用解析 第3回 複素関数・1次形式

1．複素関数

△ **複素関数：** $w=f(z)\in\mathbb{C}\ \ (z\in D\subset\mathbb{C})$． $z=x+iy$ とすると，

$$f(z)=f(x+iy)=\underbrace{u(x,y)}_{\text{実部}}+i\,\underbrace{v(x,y)}_{\text{虚部}}.\ \ //$$

△ $f(D)\equiv\{f(z)|\ z\in D\}$ ：関数 f による集合 $D\subset\mathbb{C}$ の**像**.

◎ 関数の図形表現(グラフは4次元図形なので描けない)

○ 点の移動 $z\xrightarrow{f}w$ と考える方法.

・ $w=f(z)=z+\alpha$ ：ベクトル α だけ平行移動.

・ $w=f(z)=\alpha z\ \ ,\alpha=se^{i\tau}$ ：動径を s 倍し，原点中心に τ 回転.

○ 曲線群の像を描く方法.

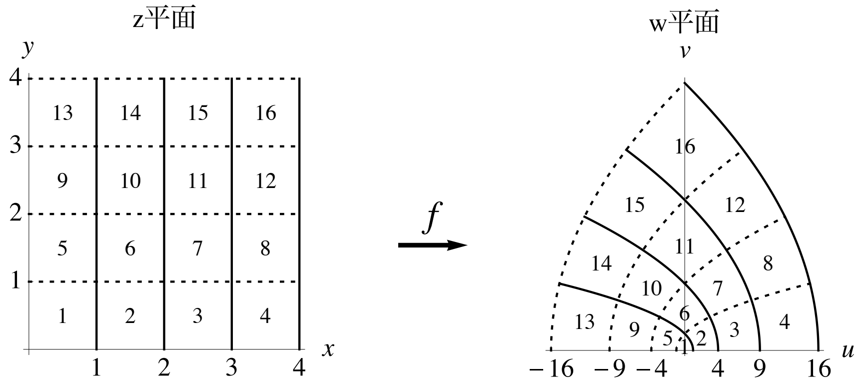
［例1］ $w=f(z)=z^2$． $w=u+iv, z=x+iy$ とすると， $u+iv=(x^2-y^2)+2ixy$ より， $u=x^2-y^2,\ v=2xy$． z 平面の直線 L の像 $f(L)=\{f(z)|z\in L\}$ を w 平面に描く.

① $L_a:z=a+iy\ \ (y\in\mathbb{R})$ ：実数 $a\neq0$ を通り， y 軸に平行な z 平面の直線． w 平面の像は,

$$u=a^2-y^2,\ v=2ay\ \ \underset{y\text{を消去}}{\Rightarrow}\ \ u=a^2-\frac{1}{4a^2}v^2\ \text{(実線の放物線)}$$

② $M_b:z=x+ib\ \ (x\in\mathbb{R})$ ：純虚数 $ib\neq0$ を通り， x 軸に平行な z 平面の直線． w 平面の像は,

$$u=x^2-b^2,\ v=2bx\ \ \underset{x\text{を消去}}{\Rightarrow}\ \ u=\frac{1}{4b^2}v^2-b^2\ \text{(破線の放物線)}$$



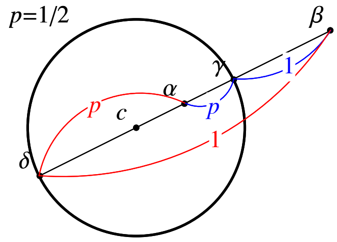
2．リーマン球面

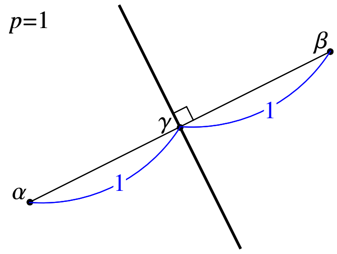
∞ を一つの数と見なし， $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ を**リーマン球面**と言う． ∞ は絶対値が任意の $z\in\mathbb{C}$ より大きい，「あるもの」の象徴.

△ $\lim\limits_{|z|\to\infty}f(z)$ が存在するなら， $f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ と書く.

△ $\lim\limits_{z\to\alpha}|f(z)|=\infty$ なら， $f(\alpha)=\infty$ と書く.

3．アポロニウス円





△ アポロニウス円：定点 α, β と正数 $p>0$ に対し， α, β からの距離の比が $\dfrac{|z-\alpha|}{|z-\beta|}=p$ となる $z \in \mathbb{C}$ の集合.

［**定理1**］ アポロニウス円は α, β を $p:1$ で内分する点 $\gamma=\dfrac{\alpha+p\beta}{1+p}$ と $p:1$ に外分する点 $\delta=\dfrac{\alpha-p\beta}{1-p}$ を結ぶ線分が直径．中心 $c=\dfrac{\alpha-p^2\beta}{1-p^2}$， 半径 $r=\dfrac{p|\alpha-\beta|}{|1-p^2|}$.

注意： $p=1$ のとき，アポロニウス円は α, β を結ぶ線分の垂直二等分線である．
これを中心 $c=\infty$， 半径 $r=\infty$ と解釈する.

4．一次変換

△ $w=f(z)=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, $\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$ を**一次変換**という． $\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$ は右辺がつぶれない条件.

［**定理2**］**(円円対応)** 一次変換 $w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ は z 平面上の円または直線を， w 平面上の円または直線に写す.
直線を中心　 半径　 の円と見なせば，一次変換で円は円に写る，となる．//

（証明）(1) 円または直線をアポロニウス円で表現して， $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right|=p$ …①とする． $a,b \in \mathbb{C}$ である.

(2) $w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ を z について解いて， $z=\dfrac{-\delta w+\beta}{\gamma w-\alpha}$ …②とする.

(3) ①に②を代入して整理すると， $\left|\dfrac{(a\gamma+\delta)w-(a\alpha+\beta)}{(b\gamma+\delta)w-(b\alpha+\beta)}\right|=p$ となる．これは， $a\gamma+\delta \neq 0$ かつ $b\gamma+\delta \neq 0$ のとき
アポロニウス円，そうでないときは円の方程式である．//

［例2］ $w=\dfrac{1}{z}$ による，3つの図形 $G_1:\mathrm{Re}\,z=1$, $G_2:|z-1|=2$, $G_3:|z-1|=1$ の像 H_1, H_2, H_3 は？

(1) $G_1:\left|\dfrac{z-2}{z}\right|=1 \overset{z=1/w\text{代入}}{\Rightarrow} H_1:\left|\dfrac{1/w-2}{1/w}\right|=1 \overset{\text{整理}}{\Rightarrow} H_1:\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

(2) $G_2:|z-1|=2 \overset{z=1/w\text{代入}}{\Rightarrow} H_2:|1/w-1|=2 \overset{\text{整理}}{\Rightarrow} H_2:\left|\dfrac{w-1}{w}\right|=2 \overset{\text{定理1(円の中心,半径)}}{\Rightarrow} H_2:\left|w+\frac{1}{3}\right|=\frac{2}{3}$.

(3) $G_3:|z-1|=1 \overset{z=1/w\text{代入}}{\Rightarrow} H_3:|1/w-1|=1 \overset{\text{整理}}{\Rightarrow} H_3:\left|\dfrac{w-1}{w}\right|=1 \overset{\text{定理1(垂直二等分線)}}{\Rightarrow} H_3:\mathrm{Re}\,w=\frac{1}{2}$.

練習問題

1．円 $G_1:|z-(1+i)|=1$ を作図せよ． $w=\dfrac{1}{z}$ による G_1 の像 H_1 の方程式を求め， H_1 を作図せよ.

2．円 $G_2:|z-(1+i)|=\sqrt{2}$ を作図せよ． $w=\dfrac{1}{z}$ による G_2 の像 H_2 の方程式を求め， H_2 を作図せよ.

第3回解答

練習問題

1．$|z-(1+i)|=1$ に $z=1/w$ を代入して，まず $H_1: |1/w-(1+i)|=1 \cdots$①.

<1>アポロニウス円の方程式に変形する．①の左辺は

$$|1/w-(1+i)|=\left|\frac{1-(1+i)w}{w}\right|=|1+i|\left|\frac{w-1/(1+i)}{w}\right|=\sqrt{2}\left|\frac{w-1/(1+i)}{w}\right|,\ \frac{1}{1+i}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i$$

だから，$H_1:\left|\frac{w-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{w}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots$②（アポロニウス円の方程式 ≡ 分子分母の w の係数が1）．

<2> ②を直線か円の方程式に直す.

②の分母を払って2乗し，$w=u+iv$ と置くと，

$$2\left\{(u-\tfrac{1}{2})^2+(v+\tfrac{1}{2})^2\right\}=2\left|w-\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i\right)\right|^2=|w|^2=u^2+v^2.$$

これを整理して，$H_1:(u-1)^2+(v+1)^2=1$．または，$H_1:|w-1+i|=1$．

別解：G_1 上に3点 $z=1,i,2+i$ を取と像は $w=1,-i,\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\in H_1$．$H_1$ は左の3点を通る円 $H_1:|w-1+i|=1$．

2. $|z-(1+i)|=\sqrt{2}$ に $z=1/w$ を代入して，まず $H_2:|1/w-(1+i)|=\sqrt{2}\cdots$①.

<1>アポロニウス円の方程式に変形する．①の左辺は

$$|1/w-(1+i)|=\left|\frac{1-(1+i)w}{w}\right|=|1+i|\left|\frac{w-1/(1+i)}{w}\right|=\sqrt{2}\left|\frac{w-1/(1+i)}{w}\right|,\ \frac{1}{1+i}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i$$

だから，$H_2:\left|\frac{w-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{w}\right|=1\cdots$②（アポロニウス円の方程式 ≡ 分子分母の w の係数が1）．

<2> ②を直線か円の方程式に直す.

②の分母を払って2乗し，$w=u+iv$ と置くと，

$$(u-\tfrac{1}{2})^2+(v+\tfrac{1}{2})^2=\left|w-\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i\right)\right|^2=|w|^2=u^2+v^2.$$

これを整理して，$H_2:-u+v+\frac{1}{2}=0$．または，$H_2:-\mathrm{Re}\,w+\mathrm{Im}\,w+\frac{1}{2}=0$．

別解：G_2 上に3点 $z=0,2,2i$ を取ると，像は $w=\infty,\dfrac{1}{2},-\dfrac{i}{2}\in H_2$．$H_2$ は左の3点を通る直線 $H_2:u-v=\frac{1}{2}$．