応用解析 第2回 曲線と領域

1．n 乗根

［**定理1**］(指数関数 $e^{i\theta}$ の指数法則まとめ)

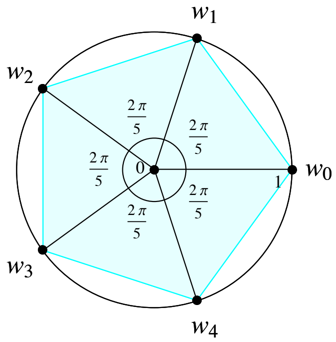
$$e^{i\theta}e^{i\tau}=e^{i(\theta+\tau)},\ \frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}=\overline{e^{i\theta}},\ \frac{e^{i\theta}}{e^{i\tau}}=e^{i(\theta-\tau)},\ \left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}\ .\ //$$

［例1］複素数 $z=-1+i\sqrt{3}$ の累乗．$z=-1+i\sqrt{3}=2e^{(2\pi/3)i}$ より，

$$z^6=2^6e^{6(2\pi/3)i}=2^6e^{4\pi i}=2^6=64.\ z^{-2}=2^{-2}e^{-2(2\pi/3)i}=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{4\pi}{3}-i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{1}{8}(-1+i\sqrt{3})\ .\ //$$

△ 単位円：原点中心，半径1の円．方程式は $|z|=1$．

図1 1の5乗根



△ 複素数 α の n **乗根** $\sqrt[n]{\alpha}$ ：n 乗して α になる複素数．方程式 $z^n=\alpha$ の n 個の解．n 個まとめて $\sqrt[n]{\alpha}$ と書く．

［**定理2**］(1の n 乗根) $\sqrt[n]{1}=e^{2\pi ik/n}$ $(0\le k<n)$．

(証明) $\left(e^{2\pi ik/n}\right)^n=e^{2\pi ik}=1$．また，これら n 個の複素数

$$w_0=e^0=1, w_1=e^{2\pi i/n}, w_2=e^{4\pi i/n},\cdots, w_{n-1}=e^{2\pi i(n-1)/n}$$

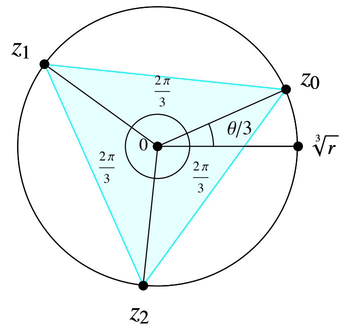
は単位円周上に，偏角 $2\pi/n$ 間隔で等間隔に並ぶ(図1)，相異なる複素数である．ゆえに，これらは方程式 $z^n=1$ の n 個の解全体となっている．//

☆ 1の n 乗根は単位円周の内接 n 角形の頂点．円周上に点1から偏角 $2\pi/n$ 間隔で等間隔に並ぶ(図1)．//

［**定理3**］(複素数 α の n 乗根) $\alpha=re^{i\theta}$ と極表示して，

$$\sqrt[n]{\alpha}=\sqrt[n]{r}e^{(\theta+2\pi k)i/n}\ \ (0\le k<n)\ .\ //$$

図2 $\alpha=re^{i\theta}$の3乗根



(証明) $\left(\sqrt[n]{r}e^{(\theta+2\pi k)i/n}\right)^n=re^{(\theta+2\pi k)i}=\alpha$．また，これら n 個の複素数

$$z_0=\sqrt[n]{r}e^{i\theta/n}, z_1=\sqrt[n]{r}e^{i\theta/n+2\pi i/n},\cdots, z_{n-1}=\sqrt[n]{r}e^{i\theta/n+2\pi i(n-1)/n}$$

は中心0で半径 $\sqrt[n]{r}$ の円周上に，偏角 $2\pi/n$ 間隔で等間隔に並ぶ(図2)，相異なる複素数である．ゆえに，これらは方程式 $z^n=\alpha$ の n 個の解全体となっている．//

☆ α の n 乗根は中心0で半径 $\sqrt[n]{r}$ の円の内接 n 角形の頂点．円周上に，点 $\sqrt[n]{\alpha}=\sqrt[n]{r}e^{i\theta/n}$ から偏角 $2\pi/n$ 間隔で等間隔に並ぶ(図2)．//

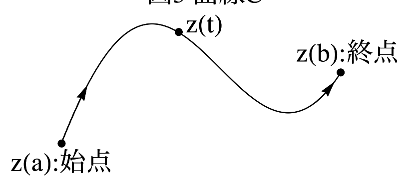
2．複素平面上の曲線

複素平面上で，向きの付いた曲線と，それらの集合としての和を「曲線」という．

◎ 曲線の表現(z 平面上)

・曲線 $C:z=z(t)$ $(t:a\to b)$ ：t は実変数，$z(t)=x(t)+iy(t)$ は実部 $x(t)$ と虚部 $y(t)$ が連続な複素数値関数．C は t が a から b まで動いたときの点 $z(t)=x(t)+iy(t)$ の軌跡．$z(a)$ を**始点**，$z(b)$ を**終点**という(図3)．

図3 曲線C



◎ 曲線に関する諸概念

△ **単純(単一)曲線**：自分自身と交差しない曲線．

△ **閉曲線**：始点と終点が一致する曲線．

［例2］線分，円と半円(図4)

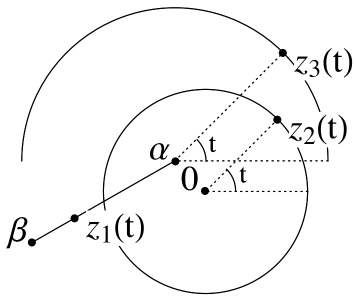
1. 点 $\alpha,\ \beta$ を結ぶ線分 $L: z = z_1(t) = \alpha + (\beta - \alpha)t\ \ (t: 0 \to 1)$.

2. 単位円(原点中心，半径1の円) $C: z = z_2(t) = e^{it}\ \ (t: 0 \to 2\pi)$.

単位円は閉曲線である．

3. 中心 α，半径 r の半円 $C_1: z = z_3(t) = \alpha + re^{it}\ \ (t: 0 \to \pi)$.

図4　直線，円，半円



3．複素平面上の領域

◎ 領域に関する諸概念

△ $\alpha \in \mathbb{C}$ の r **近傍**： $B(\alpha, r) = \{z \mid |z - \alpha| < r\}$．$\alpha$ を中心とする半径 r の円の内部である．

以下 D を複素数の集合，すなわち，$D \subset \mathbb{C}$ とする．

△ D の補集合 $D^c = \{z \mid z \in \mathbb{C},\ z \notin D\}$.

△ α は D の**内点** $\Leftrightarrow$ 十分小さい $r > 0$ で $B(\alpha, r) \subset D$.

△ α は D の**外点** $\Leftrightarrow$ 十分小さい $r > 0$ で $B(\alpha, r) \subset D^c$ $\Leftrightarrow$ α は D^c の内点.

△ α は D の**境界点** $\Leftrightarrow$ どんな小さい $r > 0$ でも $B(\alpha, r) \cap D \neq \emptyset$ かつ $B(\alpha, r) \cap D^c \neq \emptyset$.

注意：境界点 α 自身は $\alpha \in D$ のこともあり，$\alpha \notin D$ $(\alpha \in D^c)$ のこともある．

△ D の**境界** ∂D ={ D の境界点全体}.

△ D は**開集合** $\Leftrightarrow$ 全ての $\alpha \in D$ は D の内点.

△ D は**閉集合** $\Leftrightarrow$ $\partial D \subset D$.

△ D は**弧状連結** $\Leftrightarrow$ D の任意の2点は D に含まれる曲線で結ばれる.

△ D は**領域** $\Leftrightarrow$ D は弧状連結な開集合.

［例3］代表的な複素数の集合

- $D: |z - \alpha| < r$ は中心 α 半径 r の**開円板**(領域)．境界 $\partial D: |z - \alpha| = r$.
- $D: |z - \alpha| \leq r$ は中心 α 半径 r の**閉円板**．境界 $\partial D: |z - \alpha| = r$.
- $D: (|z - \alpha| - r_1)(|z - \alpha| - r_2) < 0,\ r_1 < r_2$ は2円 $C_1: |z - \alpha| = r_1,\ C_2: |z - \alpha| = r_2$ で挟まれた**円環領域**.
- $D: \mathrm{Re}\, z < 0$ は**左半平面**(領域)，$D: \mathrm{Re}\, z > 0$ は**右半平面**(領域)．境界は共に虚軸 $\partial D: \mathrm{Re}\, z = 0$.
- $D: \mathrm{Im}\, z < 0$ は**下半平面**(領域)，$D: \mathrm{Im}\, z > 0$ は**上半平面**(領域)．境界は共に実軸 $\partial D: \mathrm{Im}\, z = 0$.
- $D: a \leq \mathrm{Re}\, z \leq b, c \leq \mathrm{Im}\, z \leq d$ は境界を含む長方形．境界 ∂D は長方形の周.
- $D: a < \arg z < b$ は2本の動径 $L_1: \arg z = a,\ L_2: \arg z = b$ で挟まれた角領域．$\partial D = L_1 \cup L_2$.

練習問題

教科書p.19演習問題より.

1．$\alpha = 1 + i$ を極表示し，α^{10} を求めよ.

2．$(|z + i| - 2)(|z - i| - 2) < 0$ を満たす z の集合を図示し，それが領域かどうか判定せよ.

練習問題

1．$\alpha=\sqrt{2}e^{\pi i/4}$．$\alpha^{10}=\left(\sqrt{2}\right)^{10}e^{10\pi i/4}=2^5e^{5\pi i/2}=2^5e^{\pi i/2}=32i$ (下左図).

2．$\left(|z-i|-2\right)\left(|z+i|-2\right)<0$ は $\left(|z-i|<2\cap|z+i|>2\right)\cup\left(|z-i|>2\cap|z+i|<2\right)$ ゆえ，集合は下右図の開集合.

上半月部と下半月部は集合内部の曲線でつなげない．よって，この集合は弧状連結でないので領域ではない．2つの領域の和集合である．