応用解析 第1回 複素数と複素平面

1．複素数

△ **純虚数** i　　：$i^2=-1$ を満たす数．$i=\sqrt{-1}$ とも書く．自由に四則演算ができる．

△ **複素数** $\alpha=a+ib$ ：a,b は実数．a を α の実部，b を虚部と言い，$a=\mathrm{Re}\,\alpha,\ b=\mathrm{Im}\,\alpha$ と書く．

△ **複素数全体の集合** $\mathbb{C}=\left\{a+ib\middle|a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}\right\}=\left\{a+ib\middle|-\infty<a<\infty,\ -\infty<b<\infty\right\}$．

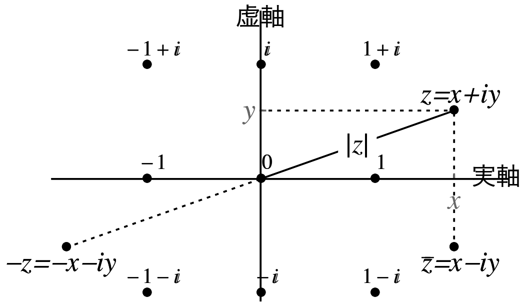
△ **共役**　$\bar{\alpha}=a-ib$ ：$\alpha=a+ib$ に対し，$a-ib$ をその共役と言い，$\bar{\alpha}=a-ib$ と書く．

△ **絶対値** $|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2}$ ：複素数 $\alpha=a+ib$ の大きさの指標．

［**例1**］高校ではもっぱら判別式が負の二次方程式の解を表すのに使った．

$$x^2-2x+2=0\ \Rightarrow\ x=1\pm i\ .\ //$$

図1 複素平面



2．複素数の四則

☆ 複素数同士の四則演算の結果はまた複素数である．

加算：$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$

減算：$(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$

乗算：$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$

除算：$\dfrac{c+id}{a+ib}=\dfrac{(ac+bd)+i(ad-bc)}{a^2+b^2}=\dfrac{ac+bd}{a^2+b^2}+i\dfrac{ad-bc}{a^2+b^2}$

（除算公式の証明）分母の有理化をめざす．i を変数と見なして演算．適宜 $i^2=-1$ を代入．

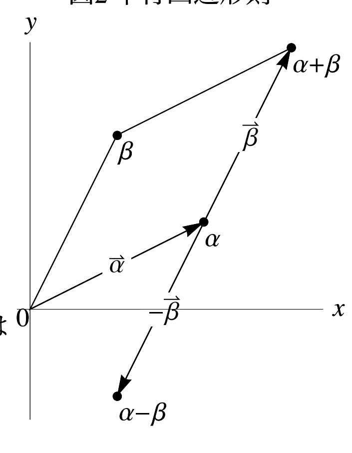
$$\frac{c+id}{a+ib}=\frac{(a-ib)(c+id)}{(a-ib)(a+ib)}=\frac{ac-ibc+iad-i^2bd}{a^2-(ib)^2}=\frac{(ac+bd)+i(ad-bc)}{a^2+b^2}.//$$

☆ $\overline{\alpha\pm\beta}=\bar{\alpha}\pm\bar{\beta},\ \overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\bar{\beta},\ \overline{\alpha/\beta}=\bar{\alpha}/\bar{\beta}$ ：加減乗除と共役は演算順序を交換できる．

☆ $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|,\ |\alpha/\beta|=|\alpha|/|\beta|$ ：乗除と絶対値は演算順序を交換できる．

☆ $|\alpha\pm\beta|\le|\alpha|+|\beta|$ ：三角不等式．

図2 平行四辺形則



3．複素平面

複素数 $z=x+iy$ を xy 平面の点 (x,y) に目盛ったもの(図1)．点 (x,y) を点 z と言う．z 平面，ガウス平面とも言う．x 軸を**実軸**，y 軸を**虚軸**という．零 $0=0+i0$ は**原点**に目盛られる．共役複素数 $\bar{z}=x-iy$ は実軸対称の位置にある．$-z=-x-iy$ は原点対称の位置にある．絶対値 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ は原点と点 z との距離である．

［**例2**］複素数 $z=x+iy=0,\ \pm1,\ \pm i,\ \pm1\pm i$ はそれぞれ複素平面の点 $(x,y)=(0,0),\ (\pm1,0),\ (0,\pm1),\ (\pm1,\pm1)$ に配置される(図1)．//

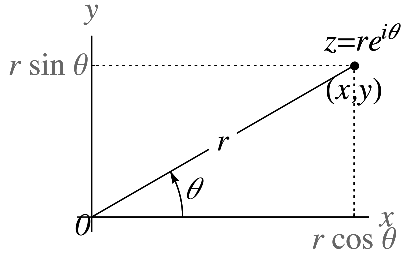
［**定理1**］(複素加減算の平行四辺形則) 複素数 $\alpha=a+ib,\ \beta=c+id$ の複素加減算 $\alpha+\beta=(a+c)+i(b+d)$ は複素平面のベクトル加減算 $(a,b)\pm(c,d)=(a\pm c,b\pm d)$ であり，平行四辺形則にしたがう(図2)．//

4．極形式と乗除算

原点 0 と複素数 $z=x+iy\neq 0$ を結ぶ線分に向けて，実軸の正の部分から反時計回りに測った角 θ を z の**偏角(argument)**と言い $\theta=\arg z$ と書く(図3)．原点と z の距離は $r=|z|$ で， $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ゆえ，

$$z=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

図3 極形式



これを複素数 z の**極形式**という．**オイラーの公式**

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

を用いて，極形式は

$$z=re^{i\theta}=|z|e^{i\arg z}$$

と簡潔に書ける．以下，もっぱらこの表記を使う．

☆ $\left|e^{i\theta}\right|=1$． $\because \left|e^{i\theta}\right|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$．//

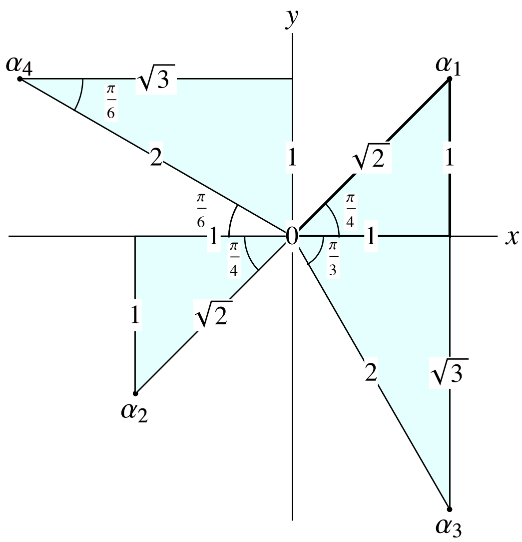
☆ $e^{i(\theta+2n\pi)}=e^{i\theta}$． $\because e^{i(\theta+2n\pi)}=\cos(\theta+2n\pi)+i\sin(\theta+2n\pi)=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$．//

［**例2**］ $\alpha_1=1+i$, $\alpha_2=-1-i$, $\alpha_3=1-i\sqrt{3}$, $\alpha_4=-\sqrt{3}+i$ の極表示は，

$\alpha_1=\sqrt{2}e^{\pi i/4}$, $\alpha_2=\sqrt{2}e^{-3\pi i/4}$, $\alpha_3=2e^{-\pi i/3}$, $\alpha_4=2e^{5\pi i/6}$ (図4)．

極表示の乗除算は簡単である(対数による乗除算と対応)．

図4 極形式の例



［**定理2**］ (指数法則) $e^{i\theta}e^{i\tau}=e^{i(\theta+\tau)}$, $\dfrac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$ が成り立つ．

（証明）三角関数の加法定理により，

$$\begin{aligned}e^{i\theta}e^{i\tau}&=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\tau+i\sin\tau)\\&=(\cos\theta\cos\tau-\sin\theta\sin\tau)+i(\sin\theta\cos\tau+\cos\theta\sin\tau)\\&=\cos(\theta+\tau)+i\sin(\theta+\tau)=e^{i(\theta+\tau)}.\end{aligned}$$

また，この式で $\tau=-\theta$ として，

$e^{i\theta}e^{-i\theta}=e^{i0}=\cos 0+i\sin 0=1$． $\therefore \dfrac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$． //

［**定理3**］ (極表示の乗除算) $\alpha=re^{i\theta}$, $\beta=se^{i\tau}$ とすると，

乗算：

$\alpha\beta=\left(re^{i\theta}\right)\left(se^{i\tau}\right)=rse^{i(\theta+\tau)}$, $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$, $\arg\alpha\beta=\arg\alpha+\arg\beta$,

除算： $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{re^{i\theta}}{se^{i\tau}}=\dfrac{r}{s}e^{i(\theta-\tau)}$, $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$, $\arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\arg\alpha-\arg\beta$. //

（証明） $\alpha\beta=\left(re^{i\theta}\right)\left(se^{i\tau}\right)=rse^{i\theta}e^{i\tau}=rse^{i(\theta+\tau)}$．また， $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{re^{i\theta}}{se^{i\tau}}=\dfrac{r}{s}e^{i\theta}e^{-i\tau}=\dfrac{r}{s}e^{i(\theta-\tau)}$． //

練習問題

1．$\alpha_1=1-i$, $\alpha_2=-1+i$, $\alpha_3=1+i\sqrt{3}$, $\alpha_4=-\sqrt{3}-i$ を複素平面に目盛り，極表示せよ．

2．$\beta_1=\alpha_1\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_3/\alpha_4$ を極表示せよ．また， β_1, β_2 を $a+ib$ の形で書け．

練習問題

1．下図． $\alpha_1=\sqrt{2}e^{-\pi i/4}$, $\alpha_2=\sqrt{2}e^{3\pi i/4}$, $\alpha_3=2e^{\pi i/3}$, $\alpha_4=2e^{-5\pi i/6}$.

2． $\beta_1=\sqrt{2}e^{-\pi i/4}\sqrt{2}e^{3\pi i/4}=2e^{\pi i/2}$, $\beta_2=\dfrac{2e^{\pi i/3}}{2e^{-5\pi i/6}}=e^{7\pi i/6}$.

$$\beta_1=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2i,\ \beta_2=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\ .$$