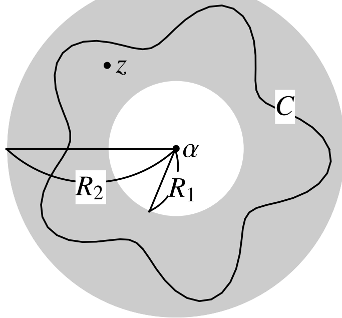
応用解析 第14回 ローラン展開

特異点回りの級数展開．特異点こそ関数のツボ．

1．ローラン展開

図1 領域A



［**定理1**］ $f(z)$ が**円環領域** $A: R_1 < |z-\alpha| < R_2$ で正則なら， A 内で，

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-\alpha)^{-k}}_{\text{主要部(負ベキ部)}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k}_{\text{正則部(正ベキ部)}} \qquad (1)$$

と収束ベキ級数で表せる． A 内で α を一周する閉曲線 C をとると，

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{k+1}}dz \quad (-\infty < k < \infty) \qquad (2)$$

である．これを α を中心とする $f(z)$ の**ローラン展開**という．//

注意： $R_1 = 0$ (図2： $\alpha = 0$)でも良い．また， $R_2 = \infty$ (図4： $\alpha = 0$)でも良い．

2．ローラン展開の計算

［**定理2**］(ベキ級数展開の一意性) 円環領域 A で(1)が収束するならその係数は(2)と一致する．すなわち， $f(z)$ **に収束するベキ級数はローラン展開**．//

ベキ級数＝ローラン展開ゆえ，ベキ級数の技法はローラン展開に使える．逆も真である．

［例1］(**無限等比級数和の公式**) $f(z)=\dfrac{1}{z^2(1-z)} = \underbrace{z^{-2}+z^{-1}}_{\text{主要部}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} z^k}_{\text{正則部}} \quad (0<|z|<1)$.

$|z|<1$ より， $f(z)=\dfrac{1}{z^2(1-z)} = z^{-2}\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k-2} = z^{-2}+z^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ．//

図2 例1

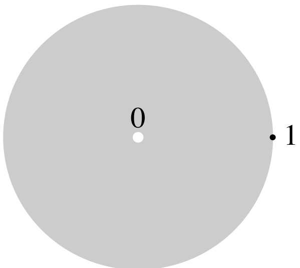


図3 例2

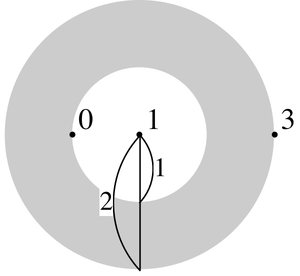
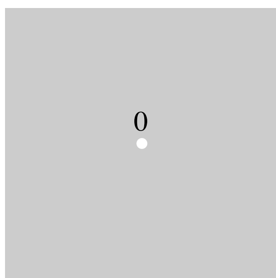


図4 例3



［例2］(**部分分数分解**) $f(z)=\dfrac{1}{z(z-3)} = \underbrace{-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(z-1)^{-k}}_{\text{主要部}} \underbrace{-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1}(z-1)^k}_{\text{正則部}} \quad (1<|z-1|<2)$.

部分分数分解で $f(z)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{z}\right)$ として，項別に考える．

① $\dfrac{1}{z-3}=\dfrac{1}{(z-1)-2}$ として，領域定義の不等式 $1<|z-1|<2$ をみると， $|z-1|<2$ ゆえ，

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{\underbrace{(z-1)}_{小}-\underbrace{2}_{大}}=\frac{-1}{\underbrace{2}_{大}}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}=\frac{-1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^k=-\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k-1}(z-1)^k.$$ (大で括り，無限等比級数和)

② $\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-1)-(-1)}$ として，，領域定義の不等式 $1<|z-1|<2$ をみると，$|z-1|>1$ ゆえ，

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\underbrace{(z-1)}_{大}-\underbrace{(-1)}_{小}}=\frac{1}{\underbrace{z-1}_{大}}\frac{1}{1-\frac{-1}{(z-1)}}=\frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z-1}\right)^k=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(z-1)^{-k}.$$ (大で括り，無限等比級数和)

［例3］(**テイラー展開公式を使う**) $f(z)=ze^{-1/z}=\underbrace{z-1}_{正則部}+\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}z^{-k}}_{主要部}\quad (|z|>0)$.

テイラー展開公式 $e^w=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k}{k!}$ …① に $w=-1/z$ を代入して $e^{-1/z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-z^{-1})^k$ …②．よって，

$$f(z)=ze^{-1/z}=z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-z^{-1})^k=z-1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}z^{-k+1}=z-1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}z^{-k}. \quad \cdots③$$

①は任意の $|w|<\infty$ で収束するので②も $|z|>0$ で収束する．よって③も $|z|>0$ で収束する．//

３．孤立特異点の分類

△ **特異点**：正則でない点($f(z)=1/z$ の $z=0$)．計算できない点($f(z)=\sin z/z$ の $z=0$)．

△ **孤立特異点** $z=\alpha$ ： α の近傍で特異点は α のみ．

☆ $z=\alpha$ が $f(z)$ の孤立特異点なら，正数 $r>0$ が存在して， $0<|z-\alpha|<r$ で $f(z)$ はローラン展開できる．//

（∵ $0<|z-\alpha|<r$ で $f(z)$ が正則となるように小さな $r>0$ を取れば定理1よりOK．）

孤立特異点 α を中心とするローラン展開を(1)の主要部で特異点を分類する．

△ **除去可能特異点**：主要部 $=0$．ローラン展開はテイラー展開である($f(\alpha)=c_0$ とする)．

△ **極(n 位の極)**：主要部 $=\sum_{k=1}^{n}c_{-k}(z-\alpha)^{-k}$ で， $c_{-n}\neq 0$．ただし， $n\geq 1$．（→例1）

△ **真性特異点**：主要部 $=\sum_{k=0}^{\infty}c_{-k}(z-\alpha)^{-k}$．0でない係数 c_{-k} が無限個現れる．（→例3）

［例4］(**除去可能特異点**) $z=0$ は $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ の除去可能特異点である．

∵ $f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}$ の主要部=0で， $f(z)$ のテイラー展開である．

第14回練習問題

教科書12.1　$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+2)}$ のローラン展開を求めよ．（例2参照）