# 応用解析 第13回 テイラー展開

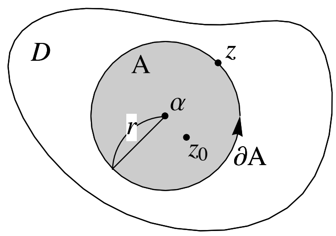
## 1．テイラー展開

［**定理1**］ $f(z)$ が領域 $D$ で正則なら， $D$ 内の円板 $A:|z-\alpha|<r$ の内部で，

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^k \qquad (1)$$

と収束ベキ級数で表せる．//

図1




△ これを $\alpha$ を中心とする $f(z)$ の**テイラー展開**という．//

△ $\alpha=0$ を中心とするテイラー展開 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$ を**マクローリン展開**という．//

（定理1の証明） $z\in\partial A,\ z_0\in A$ とすると(図1)， $\left|\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}\right|<1$ だから，

$$\frac{1}{z-z_0}=\frac{1}{(z-\alpha)-(z_0-\alpha)}=\frac{1}{z-\alpha}\cdot\frac{1}{1-\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}}=\frac{1}{z-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}\right)^k. \quad \cdots①$$

①とコーシーの積分公式より，

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\overset{①}{=}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z_0-\alpha)^k f(z)}{(z-\alpha)^{k+1}}dz$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(z_0-\alpha)^k\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{k+1}}dz\right)\overset{コーシー}{=}\sum_{k=0}^{\infty}(z_0-\alpha)^k\left(\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\right).$$

これを整理して，求める式を得る．//

［**定理2**］(ベキ級数展開の一意性) 点 $\alpha$ の近傍で，

$$f(z)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l(z-\alpha)^l \qquad (2)$$

ならば， $a_k=f^{(k)}(\alpha)/k!\ (k\geq 0)$．すなわち， $f(z)$ **に収束するベキ級数はテイラー展開．**//

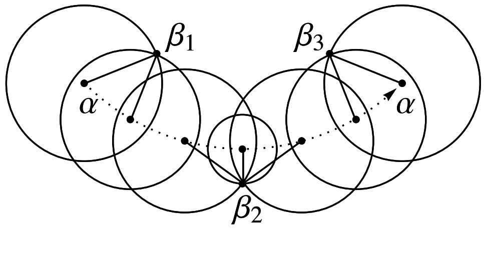
**ベキ級数＝テイラー展開**である．テイラー展開の収束円・収束半径とは，ベキ級数としての収束円・収束半径である．

［**定理3**］点 $\alpha$ に一番近い $f(z)$ の特異点を $\beta$ とすると， $\alpha$ に中心とする $f(z)$ のテイラー展開の収束半径は $R$ は $R=|\alpha-\beta|$．//

△ **特異点**：微分できない点．

［例1］図2で， $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ は $f(z)$ の特異点とする．図はテーラー展開の中心 $\alpha$ が点線上を動いたときの，収束円と収束半径の変化をあらわす．図のように， $\alpha$ とその最近の特異点 $\beta_i$ を結ぶ線分が収束円の半径である．

図2 中心αの移動と収束半径の変化




［**定理4**］点 $\alpha$ の近傍で $f(z)$ が正則なら，導関数 $f'(z)$ と原始関数 $F(z)$ も $\alpha$ の近傍で正則．//

［定理5］ $f(z), f'(z), F(z)$ の点 $\alpha$ を中心とするテイラー展開の収束半径は等しい．//

## 2．テイラー展開の計算

**ベキ級数＝テイラー展開**ゆえ，ベキ級数の技法はテイラー展開に使える．逆も真である．

［例2］ $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ のマクローリン展開は，等比級数の和の公式より $f(z)=\dfrac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ．

$f^{(k)}(z)=\dfrac{k!}{(1-z)^{k+1}}$ より， $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{k!}{k!}z^k=\sum_{k=0}^{\infty}z^k$ でも良い．収束半径 $R=1$ は展開中心0と特異点 $z=1$ との距離に等しい．//

［例3］ $f(z)=e^{-z^2}$ のマクローリン展開は， $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!}z^{2k}$ …①.

ベキ級数①は収束ベキ級数 $e^w=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}w^k$ …②に $w=-z^2$ を代入したものである．②は任意の $w$ で収束するので，①も任意の $z$ で収束し，収束半径 $R=\infty$ ．//

［例4］ $f(z)=\log z=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}(z-1)^k$ を示す．収束半径 $R=1$ である．

等比級数和と項別積分による方法． $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1-(1-z)}=\sum_{k=0}^{\infty}(1-z)^k$ $(|z-1|<1)$ を項別積分して，

$$\log z=\int\frac{dz}{z}+c=c+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-(1-z)^{k+1}}{k+1}=c+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}(z-1)^{k+1}.$$

ここで， $c$ は積分定数．両辺に $z=1$ を代入して， $0=c+0$ ．よって， $c=0$ ．これより，

$$\log z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}(z-1)^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(z-1)^k .$$

収束半径は微分しても積分しても変わらないので $R=1$ ．//

### 第13回練習問題

1． $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ のマクローリン展開とその収束半径 $R$ を求めよ．（例3参照）

収束半径は展開の中心 $\alpha=0$ と最近の特異点との距離.

2． $f(z)=\tan^{-1}z$ のマクローリン展開とその収束半径 $R$ を求めよ．（例4参照）

収束半径は微分しても積分しても変わらない.

# 第13回練習問題

１． $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ のマクローリン展開とその収束半径 $R$ を求めよ．（例3参照）

収束半径は展開の中心 $\alpha=0$ と最近の特異点との距離.

２． $f(z)=\tan^{-1}z$ のマクローリン展開とその収束半径 $R$ を求めよ．（例4参照）

収束半径は微分しても積分しても変わらない.

解答

１．等比級数の和公式より，

$$g(z)=\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-z^2)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}.$$

この級数は $\left|z^2\right|<1$ で収束， $\left|z^2\right|>1$ で発散するので，収束半径は $R=1$ ．収束ベキ級数はテイラー展開である．また展開の中心は0ゆえ，これがマクローリン展開である．

特異点は分母 $z^2+1$ が0となる $z=\pm i$ ．展開の中心である原点との距離は共に1．このことからも， $R=1$ が分かる．//

２．公式 $f'(z)=\dfrac{1}{z^2+1}=g(z)$ より，問 1 の級数を項別積分して，

$$f(z)=\int g(z)dz+c=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}z^{2k+1}+c\,.$$

積分定数 $c$ を決めるために $z=0$ とすると，

$$0=\tan^{-1}0=f(0)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}0^{2k+1}+c=c$$

ゆえ， $c=0$ ．ゆえに，

$$\tan^{-1}z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}z^{2k+1}\,.$$

また，積分しても収束半径は変わらないので， $R=1$ ．

＜ノート＞

（定理2の証明） $f(z)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l(z-\alpha)^l$ を $k$ 回微分して $z=\alpha$ を代入すると， $(\alpha-\alpha)^{l-k}=0\ (l\ge k+1)$ だから，

$$f^{(k)}(z)=\sum_{l=k}^{\infty}l(l-1)\cdots(l-k+1)a_l(z-\alpha)^{l-k}\ \Rightarrow\ f'(\alpha)=\underbrace{k(k-1)\cdots 1a_k}_{l=k\text{の項}}=k!a_k.$$

これより，求める関係を得る．右辺の級数は項別微分している．//

（定理3の証明） $C:|z-\alpha|=|\beta-\alpha|$ とする． $C$ の内部の点を $\zeta$ とすると $|\zeta-\alpha|<|\beta-\alpha|$ ゆえ，

$|\zeta-\alpha|<r<|\beta-\alpha|$ となる $r$ が取れる．仮定より $C$ 内には特異点はない．すなわち， $f(z)$ は $C$ 内で正則．ゆえに， $A:|z-\alpha|<r$ とすると，定理1よりテイラー展開(1)は $A$ の内部で収束．よって， $z=\zeta$ で収束する．

$\zeta$ は任意だから，(1)は $C$ の内部で収束する．これより，収束半径 $R \geq |\beta-\alpha|$ ．ここで， $R > |\beta-\alpha|$ を仮定して矛盾を導けば $R = |\beta-\alpha|$ が示される．

$R > |\beta-\alpha|$ なら， $C_R : |z-\alpha| = R$ の内部でベキ級数(1)は収束し，正則関数 $f(z)$ を定義する．ゆえに， $C_R$ の内部の点 $\beta$ は特異点ではあり得ない．//

（定理4の証明）◎1「 $f(z)$ が正則⇒ $F(z)$ が正則」：第9回定理2より， $f(z)$ が正則なら $F'(z) = f(z)$ となる原始関数 $F(z)$ が存在する． $F(z)$ はもちろん微分可能で正則である．
◎2「 $f(z)$ が正則⇒ $f'(z)$ が正則」：第10回コーシーの積分公式より，正則関数 $f(z)$ は無限回微分可能．ゆえに， $f'(z)$ の微分 $f''(z)$ が存在する．よって $f'(z)$ は正則．
◎3「 $F(z)$ が正則⇒ $f(z)$ が正則」：◎2の $f(z)$ を $F(z)$ で置き換える．
◎4「 $f'(z)$ が正則⇒ $f(z)$ が正則」：◎1の $f(z)$ を $f'(z)$ で置き換える．

（定理5の証明）定理4より $f(z)$, $f'(z)$, $F(z)$ の正則点は一致する．ゆえに， $f(z)$, $f'(z)$, $F(z)$ の特異点（正則でない点）も一致する．これと定理3より，三者の収束半径は一致する．//