応用解析 第12回 ベキ級数

1．ベキ級数

△ 複素数列の収束：$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \iff \lim_{n\to\infty} |\alpha_n - \alpha| = 0$．//

△ 複素級数の収束：$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \sigma \iff \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = \sigma \iff \lim_{n\to\infty} \left| \sigma - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \right|$．//

定点 $\alpha \in \mathbb{C}$ を中心とするベキ級数は，以下のような関数(無限次多項式)である．

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k = c_0 + c_1(z-\alpha) + c_2(z-\alpha)^2 + \cdots. \tag{1}$$

ベキ級数が収束する z の範囲は円板である．(数学では円**盤**の字を充てない．)

［定理1］ α を中心とする円 $C: |z-\alpha| = R$ が存在し，その内部で(1)は収束，外部で発散する．//

△定理1の円 C を**収束円**，その半径 R を**収束半径**と言う．//

・注意1：C 上では点毎に(1)の収束発散が決まる．//

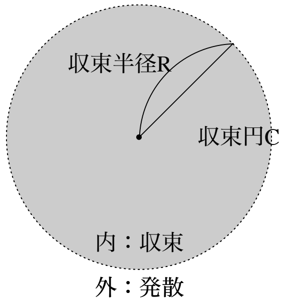
・約束1：$z=\alpha$ 以外の全ての $z \in \mathbb{C}$ で(1)が発散するとき $R=0$ とする．//

・約束2：全ての $z \in \mathbb{C}$ で(1)が収束するとき $R=\infty$ とする．//

［定理2］収束円内で，$f(z)$ は正則．その導関数 $f'(z)$ と原始関数 $F(z)$ は

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z-\alpha)^{k-1}, \quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (z-\alpha)^{k+1}$$

図1 収束円



である．これらは，(1)の級数を**項別微分**，**項別積分**したものと等しい．**微積簡単！**//

2．収束半径の計算

［定理3］(**収束半径の計算公式**) 右辺の極限が存在すれば，

(1) $\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right|$ （ダランベールの公式），

(2) $\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} |c_k|^{1/k}$ (コーシー・アダマールの公式)．//

［例1］ダランベールの公式により，次のベキ級数の収束半径 R を求める．

$$(1)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}(z-1)^k, \quad (2)\ \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^k, \quad (3)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(z+1)^k, \quad (4)\ \sum_{k=0}^{\infty} k!(z-\alpha)^k.$$

(1) $\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \frac{1/(k+2)^2}{1/(k+1)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} = 1.\ \therefore R = \frac{1}{1} = 1.$

(2) $\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \frac{|a|^{k+1}}{|a|^k} = \lim_{k\to\infty} |a| = |a|.\ \therefore R = \frac{1}{|a|}.$

(3) $\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \frac{1/(k+1)!}{1/k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0.\ \therefore R = \frac{1}{0} = \infty.$

(4) $\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty.\ \therefore R = \frac{1}{\infty} = 0.$ //

［例2］ベキ級数 $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} z^k$ の収束半径 R は，コーシー・アダマールの公式により

$$\frac{1}{R}=\lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}\right]^{1/k}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}=e$$ となり， $R=\dfrac{1}{e}$． //

3．ベキ級数の例

◎ 指数関数由来のベキ級数　中心 $\alpha=0$，収束半径 $R=\infty$ 項別微分

$$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k \underset{\text{項別積分(積分定数1)}}{\overset{\text{項別微分}}{\rightleftarrows}} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k=e^z,$$

$$\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1} \underset{\text{項別積分(積分定数0)}}{\overset{\text{項別微分}}{\rightleftarrows}} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}=\cos z,$$

$$\sinh z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}z^{2k+1} \underset{\text{項別積分(積分定数0)}}{\overset{\text{項別微分}}{\rightleftarrows}} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}z^{2k}=\cosh z.$$

◎ 等比級数由来のベキ級数　$\alpha=0$，収束半径 $R=1$

	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$	$\cdots$	$f^{(l)}(z)$
微分	$\frac{1}{1-z}$	$\frac{1}{(1-z)^2}$	$\frac{2}{(1-z)^3}$	$\cdots$	$\frac{(l-1)!}{(1-z)^{l+1}}$
項別微分	$\sum_{k=0}^{\infty}z^k$	$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k$	$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)z^k$	$\cdots$	$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)\cdots(k+l)z^k$

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k \underset{\text{項別微分}}{\overset{\text{項別積分(積分定数0)}}{\rightleftarrows}} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}z^k=\log(1+z).$$

［例3］ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}k^2r^k=\sum_{k=0}^{\infty}\big((k+1)(k+2)-3(k+1)+1\big)r^k=\frac{2}{(1-r)^3}-\frac{3}{(1-r)^2}+\frac{1}{1-r}=\frac{r(1+r)}{(1-r)^3}$．

［例4］ $f(z)=\dfrac{1}{z-\beta}$ を $\alpha(\alpha\neq\beta)$ を中心とするベキ級数に展開する．$\delta=\beta-\alpha$ とすると，

$$f(z)=\frac{1}{z-\beta}=\frac{1}{(z-\alpha)-\delta}=\frac{-1}{\delta}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{\delta}}=\frac{-1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{\delta}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\left(-\delta^{-k-1}\right)}_{c_k}(z-\alpha)^k.\ //$$

ダランベールの公式より，収束半径 $R=|\delta|=|\beta-\alpha|$． //

第12回練習問題

1． $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}z^k$ の収束半径 R を求めよ．

2． $f(z)=\dfrac{1}{z-1}$ の $\alpha=i$ を中心としたベキ級数に展開し，その収束半径 R を求めよ．

第12回練習問題

１． $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}z^k$ の収束半径 R を求めよ．

２． $f(z)=\dfrac{1}{z-1}$ の $\alpha=i$ を中心としたベキ級数に展開し，その収束半径 R を求めよ．

解答

１． $c_k=k!/k^k$ をダランベールの公式に代入して，

$$\frac{1}{R}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)!/(k+1)^{k+1}}{k!/k^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)!}{k!}\cdot\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^k}{(k+1)^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k}=\frac{1}{e}.$$

ゆえに， $R=\dfrac{1}{1/e}=e$． //

２． $$f(z)=\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(i-1)-(i-z)}=\frac{1}{i-1}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{i-z}{i-1}}=\frac{1}{i-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i-z}{i-1}\right)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i-1}\right)^{k+1}(i-z)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{i-1}\right)^{k+1}(z-i)^k.$$

$c_k=(-1)^k\left(\dfrac{1}{i-1}\right)^{k+1}$ をダランベールの公式に代入して，

$$\frac{1}{R}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}\left(\dfrac{1}{i-1}\right)^{k+2}}{(-1)^k\left(\dfrac{1}{i-1}\right)^{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{i-1}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ゆえに， $R=\dfrac{1}{1/\sqrt{2}}=\sqrt{2}$． //