応用解析 第11回 コーシーの積分公式

1．コーシーの積分公式

［定理1］(コーシーの積分公式) 正の向きを持つ単純閉曲線 C 上とその内部で $f(z)$ が正則なら， C の内部の点 z について(図1),

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \quad (\text{注意!積分変数は } \zeta\text{ })．// \tag{1}$$

C 上の関数値 $f(\zeta)$ を知れば， C 内の関数値 $f(z)$ が分かる．remote sensing!

（証明） z が中心の小円 $C_r:\zeta=\zeta(t)=z+re^{it}$ $(t:0\to 2\pi)$ を C 内に取る(図2)． C と C_r とで囲む領域 D_r の閉包 $\bar{D}_r$ で $f(z)$ は正則ゆえ，コーシーの積分定理より， $\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{\partial D_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=0$．半径 r は任意に小さく取れ①， $f(z+re^{it})\to f(z)$ $(r\to 0)$ ②．ゆえに，

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \overset{①}{=} \lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{f(z+re^{it})}{\underbrace{z+re^{it}}_{\zeta(t)}-z}\underbrace{ire^{it}}_{\zeta'(t)}dt=\lim_{r\to 0} i\int_0^{2\pi}f(z+re^{it})dt \overset{②}{=} i\int_0^{2\pi}f(z)dt=2\pi i\, f(z).\ //$$

図1 定点z，動点ζ

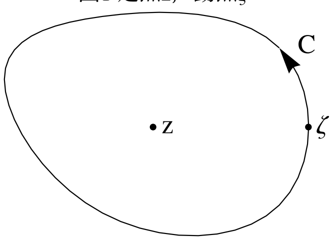


図2 小円C_r，領域D_r

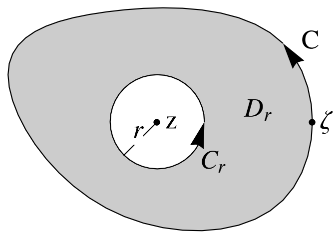
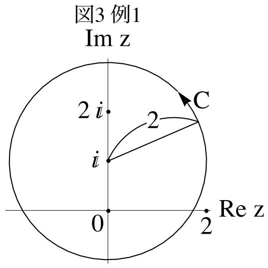


図3 例1



［例1］ $I_1=\int_C \frac{\sin\zeta}{\zeta-2i}d\zeta,\ I_2=\int_C\frac{\sin\zeta}{\zeta-2}d\zeta$， $C:|z-i|=2$ を求める(図3)．断らない限り単純閉曲線の向きは正(反時計回り)である． $f(z)=\sin z$ は全平面で正則である．

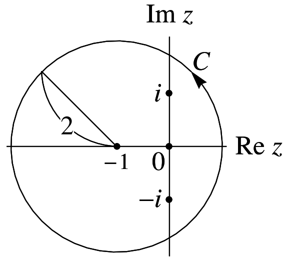
(1) $f(z)=\sin z$ は全平面で正則で $z=2i$ は円 C の内部だから，コーシーの積分公式(定理1)より，

$$I_1=\int_C\frac{\sin\zeta}{\zeta-2i}d\zeta=2\pi i\, f(2i)=2\pi i\sin 2i=2\pi i\frac{e^{i2i}-e^{-i2i}}{2i}=-(e^2-e^{-2})\pi\ .$$

(2) $z=2$ は円 C の外部であるから， C 上とその内部で $g(z)=\frac{\sin z}{z-2}$ は正則．ゆえに，コーシーの積分公式(第9回定理1)より， $I_2=\int_C g(\zeta)d\zeta=0$．**内部と外部で扱いが違う!**//

［例2］ $I=\int_C\frac{z\cos z}{z^2+1}dz,\ C:|z+1|=2$ を求める(図4)．**部分分数分解**

図4 例2



$\frac{z}{z^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}\right)$ より，

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int_C\frac{\cos z}{z-i}dz+\frac{1}{2}\int_C\frac{\cos z}{z+i}dz=\frac{2\pi i}{2}\cos i+\frac{2\pi i}{2}\cos(-i)\\&=2\pi i\cos i=2\pi i\frac{e^{ii}+e^{-ii}}{2}=\pi i(e^{-1}+e).\end{aligned}\ .$$

２．公式の拡張

［定理2］(コーシーの積分公式) 正の向きを持つ単純閉曲線 C 上とその内部で $f(z)$ が正則なら，C の内部の点 z について(図1),

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta \quad (k\ge 0)\ .\ // \tag{2}$$

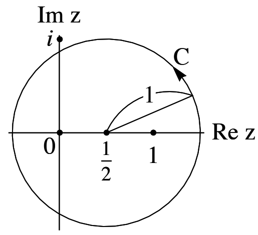
C 上の関数値 $f(\zeta)$ を知れば，C 内の関数値も導関数も分かる．

（証明）$1/(\zeta-z)$ を z で k 回微分すると，$\left(1/(\zeta-z)\right)^{(k)}=k!/(\zeta-z)^{k+1}$．ゆえに，式(1)を z で k 回微分すると，

$$f^{(k)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)^{(k)} f(\zeta)d\zeta=\frac{k!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta.\ //$$

［例3］ $I_1=\int_C\frac{e^{2\zeta}}{(\zeta-1)^3}d\zeta,\ I_2=\int_C\frac{e^{2\zeta}}{(\zeta-i)^3}d\zeta \quad C:\left|z-\frac{1}{2}\right|=1$ を求める(図5).

図5 例3



(1) $f(z)=e^{2z}$ は全平面で正則で，$z=1$ は C の内部だから，コーシーの積分公式(定理2)で $k=2$ として，$f^{(2)}(z)=4e^{2z}$ を用いると，

$$I_1=\int_C\frac{e^{2\zeta}}{(\zeta-1)^3}d\zeta=\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-1)^3}d\zeta=\frac{2\pi i}{2!}f^{(2)}(1)=\pi i\,4e^2=4\pi ie^2\,.$$

(2) $z=i$ は円 C の外部であるから，C 上とその内部で $g(z)=\frac{e^{2z}}{(z-i)^3}$ は正則．ゆえに，コーシーの積分公式(第10回定理1)より，$I_2=\int_C g(\zeta)d\zeta=0$ ．//

３．正則関数の性質

［定理3］正則関数(微分が1回できる関数)は無限回微分可能．//

（証明）$f(z)$ が点 $z=\alpha$ で正則なら，α を中心とする小さい閉円板 $B_{2r}:|z-\alpha|\le 2r$ で微分可能．ゆえに，円 $C_r:|z-\alpha|=r$ の上と内部で正則．よって，定理2より，任意の $k\ge 1$ に対して，

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta$$

が存在する．//

［定理4］(最大値の原理) $f(z)$ が領域 D の閉包 $\bar{D}$ で正則なら，$|f(z)|$ はその $\bar{D}$ における最大値を境界 ∂D 上で取る．すなわち，

$$\max_{z\in\bar{D}}|f(z)|=\max_{z\in\partial D}|f(z)|\ .\ // \tag{3}$$

第11回練習問題

１． $I=\int_C\frac{e^z}{z^2(z+1)}dz,\ C:|z|=\frac{2}{3}$ を求めよ．（ヒント：例2,3）

第11回練習問題

1． $I=\int_C \frac{e^z}{z^2(z+1)}dz,\ C:|z|=\frac{2}{3}$ を求めよ．（ヒント：例2,3）

解答：C 内で正則な因子 $f(z)$ をなるべく大きくとる．

$z=-1$ は円 C の外部だから，$f(z)=\frac{e^z}{z+1}$ は C 上とその内部で正則．

$$f'(z)=\frac{e^z}{z+1}-\frac{e^z}{(z+1)^2}$$

より，$f'(0)=1-1=0$．よって，コーシーの積分公式(定理2)より，

$$I=\int_C \frac{e^z}{z^2(z+1)}dz=\int_C \frac{f(z)}{z^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}f'(0)=0\ .\ //$$

解説：部分分数分解 $\frac{1}{z^2(z+1)}=\frac{a}{z^2}+\frac{b}{z}+\frac{c}{z+1}$ を求める．

(1) 分母を払って，

$$a(z+1)+bz(z+1)+cz^2=1\ .\ \cdots①$$

(2) 分母の因子 z，$z+1$ が0となる数を①の z に代入．

$z=0$ を代入：$a=1$．

$z=-1$ を代入：$c=1$．

(3) (2)の結果を①に代入すると，$(z+1)+bz(z+1)+z^2=1$．zの2次係数をみて，$b=-1$．

以上より，$\frac{1}{z^2(z+1)}=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}$．$\cdots②$

＜ノート＞

（定理4：最大値の原理の証明）最大値を取る点を $z=\alpha\in\bar{D}$ とする．$\alpha\in\partial D$ であれば式(1)はもちろん成立．$\alpha\notin\partial D$ のときを考える．α を中心とする $\bar{D}$ に含まれる円の中で最大のものを $C:|z-\alpha|=r$ とする．C が ∂D と接触する点を β とする(図A)．$|f(\beta)|=|f(\alpha)|$ **を示せば，境界点** β **でも** $|f(z)|$ **は最大値を取ることになり，定理が示される．** $C:z=\alpha+re^{it}\ (t:0\to 2\pi)$ とすると，コーシーの積分公式より，

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(\alpha+re^{it})}{\underbrace{\alpha+re^{it}}_{z(t)}-\alpha}\underbrace{ire^{it}}_{z'(t)}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha+re^{it})dt\ .$$

これより，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\alpha)|dt=|f(\alpha)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha+re^{it})dt\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(\alpha+re^{it})\right|dt\ .$$

したがって，

$$\int_0^{2\pi}\left(\left|f(\alpha+re^{it})\right|-|f(\alpha)|\right)dt\ge 0\ .\ \cdots①$$

$|f(\alpha)|$ は最大だから，$\left|f(\alpha+re^{it})\right|-|f(\alpha)|\le 0$．ゆえに，①が成立するためには，①の積分は0で，全ての $0\le t\le 2\pi$ で $\left|f(\alpha+re^{it})\right|-|f(\alpha)|=0$ でなくてはならない．すなわち，全ての $z\in C$ 上で $|f(z)|=|f(\alpha)|$．特に $|f(\beta)|=|f(\alpha)|$ である．//

同じ論法を用いて，次の命題も示される．

［命題］ $f(z)$ が領域 D の閉包 $\bar{D}$ で正則．$|f(z)|$ はその $\bar{D}$ における最大値を D で取る．とすると，$f(z)$ は定数．//