応用解析 第10回 コーシーの積分定理

1．領域と境界

その境界が曲線である領域を考える．領域に関する諸概念は第2回資料参照.

△ $D \subset \mathbb{C}$ は**領域** ⇔ D は弧状連結な開集合.

・境界 ∂D は曲線とし， D を進行方向左側に見るように方向付ける．これを**正の方向**という.

・単純閉曲線では，反時計回りの向きを**正の方向**という.

△ 単連結領域　⇔　穴のない領域(図1).

△ 2重連結領域　⇔　穴が一つある領域(図2).

△ 重連結領域 n　⇔　穴が $n-1$ 個ある領域(図3).

図1 単連結領域Dと境界∂D

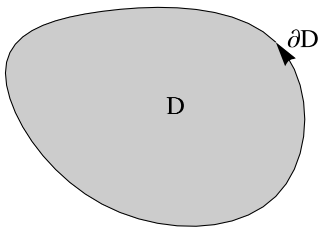


図2 2重連結領域Dと境界∂D

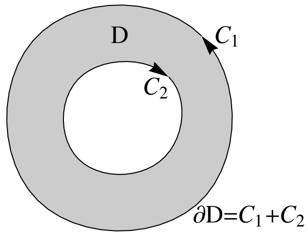
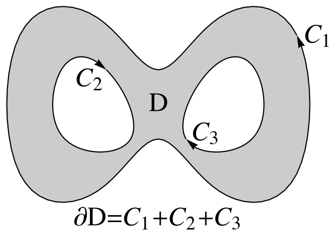


図3 3重連結領域Dと境界∂D



△ D の閉包 $\bar{D} = D \cup \partial D$

2．コーシーの積分定理

［定理1］(コーシーの積分定理) $f(z)$ が領域 D の閉包 $\bar{D}$ で正則なら $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$． //

D と ∂D の幾何的配置については上の図1, 2, 3を参照.

図4 単連結領域D内の閉曲線C

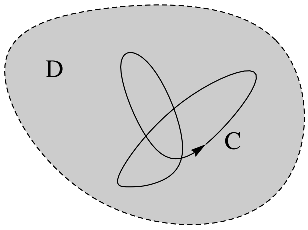


図5 単純閉曲線C

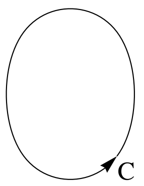


図6 交差する曲線

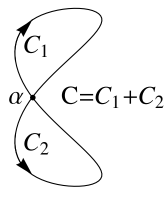
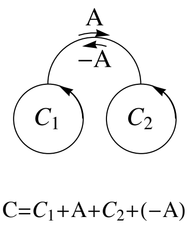


図7 二度通る曲線



［系1］単連結領域 D で $f(z)$ が正則なら， D 内の閉曲線 C について， $\int_C f(z)dz = 0$　(図4)．//

（証明）(0) C が単純閉曲線(自分自身と交わらない)のとき(図5)． C の内部を D' とすると($\partial D' = C$ である)，その閉包 $\bar{D}' \subset D$ で $f(z)$ は正則．ゆえにコーシーの積分定理より $\int_C f(z)dz = 0$．

(1) C が点 α で交わるとき(図6)． C は α が始点の2つの単純閉曲線 C_1, C_2 に分割される．それぞれにつき，(0)より $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = 0$ ゆえ， $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = 0$．

(2) C が弧 $A(\alpha \to \beta)$ を2度通るとき． $C = C_1 + A + C_2 + (-A)$ に分割される(図7)．(0)より

$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = 0$ ゆえ， $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_A f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz - \int_A f(z)dz = 0$．

(3) さらに複雑に交差するときも，(1), (2)の操作を繰り返して，求める結論を得る．//

［系2］単連結領域 D で $f(z)$ が正則なら， D 内2の曲線 $C:\alpha \to \beta,\ C':\alpha \to \beta$ で,

$$\int_C f(z)dz = \int_{C'} f(z)dz \quad . \ //$$

（証明） $C = C_1 - C_2$ は D 内の閉曲線ゆえ，系1より， $\int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = \int_C f(z)dz = 0$ ． //

系2より，定点 $\alpha \in D$ について，始点を α ，終点を $z \in D$ とする積分は経路 $C:\alpha \to z$ に依らないので z の関数,

$$F(z) = \int_\alpha^z f(\zeta)d\zeta \qquad \text{（積分路は任意）}$$

を定義する．

［定理2］(原始関数の存在) 関数 $f(z)$ が単連結領域 D で正則なら， $F(z) = \int_\alpha^z f(\zeta)d\zeta$ は $f(z)$ の原始関数である．すなわち， $F'(z) = f(z)$ である．//

（証明）webノート．//

3．基本周回積分

［定理3］ C が点 α を通らない正の向き(反時計回り)の単純閉曲線とするとき,

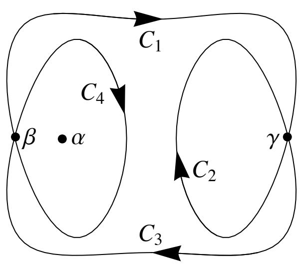
$$\text{基本周回積分：} \int_C \frac{dz}{z-\alpha} = \begin{cases} 2\pi i & (\alpha \text{が} C \text{の内部}), \\ 0 & (\alpha \text{が} C \text{の外部}). \ // \end{cases}$$

基本周回積分は，単純閉曲線が α の回りを正の向きに回ると $2\pi i$ ，負の向きに回ると $-2\pi i$ ， α を囲まなければ0となる．

［例1］(ぐるぐる問題) 図8の閉曲線 C について， $I = \int_C \frac{dz}{z-\alpha}$ を求める．曲線 C をその交点 β, γ で4つの曲線 $C_1:\beta \to \gamma,\ C_2:\gamma \to \gamma,\ C_3:\gamma \to \beta,\ C_4:\beta \to \beta$ に分解する．これらを再編成して， C は3つの単純閉曲線の和 $C = (C_1 + C_3) + C_2 + C_4$ であることが分かる． $C_1 + C_3$ と C_4 は負の向きに α の周りを1周している． C_2 は α を囲まない．したがって,

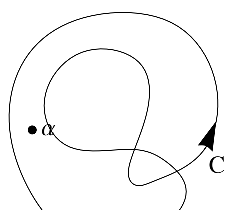
$$\int_C \frac{dz}{z-\alpha} = \int_{C_1+C_3} \frac{dz}{z-\alpha} + \int_{C_2} \frac{dz}{z-\alpha} + \int_{C_4} \frac{dz}{z-\alpha} = -2\pi i + 0 - 2\pi i = -4\pi i \ . \ //$$

図8 ぐるぐる



C=C_1+C_2+C_3+C_4

図9 ぐるぐる演習問題



第10回練習問題

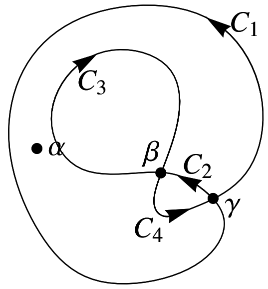
1. 図9の閉曲線 C について，基本周回積分 $I = \int_C \frac{dz}{z-\alpha}$ を求めよ．（ヒント：例１）

第10回練習問題

1. 図9の閉曲線 C について，基本周回積分 $I=\int_C \frac{dz}{z-\alpha}$ を求めよ．（ヒント：例１）

解答

図9 ぐるぐる演習問題解



　C を交点 β,γ で分解して，

$C_1:\gamma\to\gamma$, $C_2:\gamma\to\beta$, $C_3:\beta\to\beta$, $C_4:\beta\to\gamma$ とする(右図)． C は

$$C=C_1+C_2+C_3+C_4=C_1+(C_2+C_4)+C_3$$

で，3つの閉曲線 C_1, C_2+C_4, C_3 の和である．ゆえに定理3より，

$$\int_C \frac{dz}{z-\alpha}=\int_{C_1}\frac{dz}{z-\alpha}+\int_{C_2+C_4}\frac{dz}{z-\alpha}+\int_{C_3}\frac{dz}{z-\alpha}=2\pi i+0+0=2\pi i\,.$$

＜ノート＞

（定理2の証明） D 内に任意の曲線 $C:\alpha\to\beta$ を引く．系2より， $\int_C f(\zeta)d\zeta$ は曲線の引き方に依らず α,β のみに依存するので， α,β の関数として， $\int_C f(\zeta)d\zeta=\int_\alpha^\beta f(\zeta)d\zeta$ と書く． α を定点とすると， $F(z)=\int_\alpha^z f(\zeta)d\zeta$ は z の関数である．さて，

$$\begin{aligned}F(z+\Delta z)-F(z)&=\int_\alpha^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta-\int_\alpha^z f(\zeta)d\zeta=\int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta\\&=\int_z^{z+\Delta z} f(z)d\zeta+\int_z^{z+\Delta z}\big(f(\zeta)-f(z)\big)d\zeta\\&=f(z)\Delta z+\int_z^{z+\Delta z}\big(f(\zeta)-f(z)\big)d\zeta.\end{aligned}$$

$f(z)$ は連続ゆえ，任意の $\varepsilon>0$ について， $|\Delta z|$ が十分小さければ $|f(\zeta)-f(z)|\le\varepsilon$ ．よって，

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to0}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|&=\lim_{\Delta z\to0}\left|\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}\big(f(\zeta)-f(z)\big)d\zeta\right|\le\lim_{\Delta z\to0}\frac{1}{|\Delta z|}\int_z^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)||d\zeta|\\&\le\lim_{\Delta z\to0}\frac{1}{|\Delta z|}\int_z^{z+\Delta z}\varepsilon|d\zeta|=\varepsilon\lim_{\Delta z\to0}\frac{1}{|\Delta z|}\int_z^{z+\Delta z}|d\zeta|=\varepsilon\lim_{\Delta z\to0}\frac{1}{|\Delta z|}|\Delta z|=\varepsilon.\end{aligned}$$

$\varepsilon>0$ は任意だから，最左辺は0に収束する．ゆえに，

$$F'(z)=\lim_{\Delta z\to0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)\,.$$

すなわち， $F(z)$ は $f(z)$ の原始関数である．//

（定理3の証明）(1) α が C の内部にあるとき， C の内部に α を中心とする円 $C_1:\alpha+re^{it}$ $(t:0\to2\pi)$ をとる． C と C_1 を境界とする二重連結領域 D の境界は，向きを考えると， $\partial D=C-C_1$ である． D 内で $f(z)=1/(z-\alpha)$ は導関数 $f'(z)=-1/(z-\alpha)^2$ を持ち，正則だから，コーシーの積分定理より，

$$\int_C\frac{dz}{z-\alpha}-\int_{C_1}\frac{dz}{z-\alpha}=\int_{\partial D}\frac{dz}{z-\alpha}=0$$

ゆえに，

$$\int_C \frac{dz}{z-\alpha} = \int_{C_1} \frac{dz}{z-\alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\underbrace{re^{it}+\alpha}_{z(t)}-\alpha} \underbrace{rie^{it}}_{z'(t)} dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \text{ . } //$$

(2) α が C の内部にあるとき， C 内で $f(z)=1/(z-\alpha)$ は導関数 $f'(z)=-1/(z-\alpha)^2$ を持ち，正則だから，コーシーの積分定理より， $\int_C \frac{dz}{z-\alpha}=0$ ． //