授業コード：73006-002,77112-002	参照物：無し	回収：解答用紙のみ

微積分学Ⅱ2中間試験 ’16.11/15

1．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t^3}{x}$ の一般解を求めよ．（10点）

2．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=-2x+\dfrac{1}{\cosh 2t}$ の一般解を求めよ．（10点）

（公式： $\displaystyle\int\frac{e^{at}}{\cosh at}dt=\frac{\log(1+e^{2at})}{a}$ ）

3．微分方程式 $x''(t)+6x'(t)+5x(t)=0$ の一般解を求めよ．（10点）

4．初期値問題 $x''(t)+6x'(t)+5x(t)=0, x(0)=0, x'(0)=4$ を解け．（10点）

5．曲面 $S:z=f(x,y)=\sin(x+y)$ を考える．

(1) 偏導関数 f_x, f_y を求めよ．（10点）

(2) S 上の点 $(a,b,c)=\left(\dfrac{\pi}{6},-\dfrac{\pi}{3},-\dfrac{1}{2}\right)$ における S の接平面の方程式を書け．（10点）

(3) S 上の点 $(a,b,c)=\left(\dfrac{\pi}{6},-\dfrac{\pi}{3},-\dfrac{1}{2}\right)$ における S の法線をパラメタ表示せよ．（10点）

6． $z=f(r,\theta),\ r=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\arctan\dfrac{y}{x}$ とするとき， $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を計算せよ．（10点）

（公式： $\dfrac{d}{dx}\arctan x=\dfrac{1}{x^2+1}$ ）

7．関数 $f(x,y)=\cosh(x-y)$ について考える．

（公式： $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2},(\cosh x)'=\sinh x,(\sinh x)'=\cosh x$ ）

(1) 導関数 $f^{(1,0)}(x,y), f^{(0,1)}(x,y), f^{(2,0)}(x,y), f^{(1,1)}(x,y), f^{(0,2)}(x,y)$ を求めよ．（10点）

(2) 2次のマクローリン展開

$$f(x,y)=\frac{f^{(0,0)}}{0!0!}+\frac{f^{(1,0)}}{1!0!}x+\frac{f^{(0,1)}}{0!1!}y+\frac{f^{(2,0)}}{2!}x^2+\frac{f^{(1,1)}}{1!1!}xy+\frac{f^{(0,2)}}{2!}y^2+R_3$$

を計算せよ．剰余項 R_3 は具体的に求めなくてもよい．この式で， $f^{(i,j)}$ は $f^{(i,j)}(0,0)$ を略記したものである．（10点）

微積分学II2中間試験 ’16.11/15解答

1．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t^3}{x}$ の一般解を求めよ．（10点）

<一般解＞ 変数分離した $xdx=2t^3dt$ を積分して， $\dfrac{1}{2}x^2=\int x\,dx=2\int t^3\,dt=\dfrac{1}{2}t^4+c$.

$$\therefore x=\pm\sqrt{t^4+C} \qquad (C=2c\text{ は任意定数}).$$

＜特殊解＞ $\dfrac{1}{x}\neq 0$ なので，特殊解は存在しない．念のため．

2．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=-2x+\dfrac{1}{\cosh 2t}$ の一般解を求めよ．（10点）

公式により， $x(t)=Ce^{-2t}+e^{-2t}\int e^{2t}\dfrac{1}{\cosh 2t}dt=Ce^{-2t}+\dfrac{1}{2}e^{-2t}\log\left(1+e^{4t}\right)=e^{-2t}\left\{C+\dfrac{1}{2}\log\left(1+e^{4t}\right)\right\}$.

3．微分方程式 $x''(t)+6x'(t)+5x(t)=0$ の一般解を求めよ．（10点）

特性方程式 $\lambda^2+6\lambda+5=(\lambda+5)(\lambda+1)=0$ より，特性解は $\lambda=-5,-1$．ゆえに，一般解は

$$x(t)=ae^{-5t}+be^{-t} \quad (a,b\text{ は任意定数}).$$

4．初期値問題 $x''(t)+6x'(t)+5x(t)=0,\ x(0)=0,\ x'(0)=4$ を解け．（10点）

問３で求めた解 $x(t)=ae^{-5t}+be^{-t}$ を微分して， $x'(t)=-5ae^{-5t}-be^{-t}$．初期条件より，

$$\begin{cases} x(0)=a+b=0, \\ x'(0)=-5a-b=4. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=-1, \\ b=1. \end{cases}$$

よって， $x(t)=-e^{-5t}+e^{-t}$.

5．曲面 $S: z=f(x,y)=\sin(x+y)$ を考える．

(1) 偏導関数 f_x, f_y を求めよ．（10点）

$f_x=\cos(x+y)$， $f_y=\cos(x+y)$.

(2) S 上の点 $(a,b,c)=\left(\dfrac{\pi}{6},-\dfrac{\pi}{3},-\dfrac{1}{2}\right)$ における S の接平面の方程式を書け．（10点）

$f_x\left(\dfrac{\pi}{6},-\dfrac{\pi}{3}\right)=f_y\left(\dfrac{\pi}{6},-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{-\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ゆえ，接平面の方程式は，

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(y+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\pi\sqrt{3}}{12}-\frac{1}{2}.$$

(3) S 上の点 $(a,b,c)=\left(\dfrac{\pi}{6},-\dfrac{\pi}{3},-\dfrac{1}{2}\right)$ における S の法線をパラメタ表示せよ．（10点）

法線ベクトルは $\left(-f_x\left(\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{3}\right),-f_y\left(\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{3}\right),1\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$．法線のパラメタ表示は，

$$(x,y,z)=\left(\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{3},-\frac{1}{2}\right)+t\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)\ (-\infty<t<\infty).$$

6． $z=f(r,\theta),\ r=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\arctan\frac{y}{x}$ とするとき， $\frac{\partial z}{\partial x}$ を計算せよ．（10点）

$u=x^2+y^2$ と置いて， $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dr}{du}=2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$．

$u=\frac{y}{x}$ と置いて， $\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{d\theta}{du}=-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{1}{1+u^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}$．　よって，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}=z_r\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-z_\theta\frac{y}{x^2+y^2}.$$

7．関数 $f(x,y)=\cosh(x-y)$ について考える．

（公式： $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},(\cosh x)'=\sinh x,(\sinh x)'=\cosh x$ ）

(1) 導関数 $f^{(1,0)},f^{(0,1)},f^{(2,0)},f^{(1,1)},f^{(0,2)}$ を求めよ．（10点）

$$f^{(1,0)}(x,y)=\sinh(x-y),\ f^{(0,1)}(x,y)=-\sinh(x-y),$$
$$f^{(2,0)}(x,y)=\cosh(x-y),\ f^{(1,1)}(x,y)=-\cosh(x-y),\ f^{(0,2)}(x,y)=\cosh(x-y).$$

(2) 2次のマクローリン展開

$$f(x,y)=\frac{f^{(0,0)}}{0!0!}+\frac{f^{(1,0)}}{1!0!}x+\frac{f^{(0,1)}}{0!1!}y+\frac{f^{(2,0)}}{2!}x^2+\frac{f^{(1,1)}}{1!1!}xy+\frac{f^{(0,2)}}{2!}y^2+R_3$$

を計算せよ．剰余項 R_3 は具体的に求めなくてもよい．この式で， $f^{(i,j)}$ は $f^{(i,j)}(0,0)$ を略記したものである．（10点）

$f^{(0,0)}=1,f^{(1,0)}=0,f^{(0,1)}=0,f^{(2,0)}=1,f^{(1,1)}=-1,\ f^{(0,2)}=1$ を代入して，

$$f(x,y)=1+0x+0y+\frac{1}{2}x^2-1xy+\frac{1}{2}y^2+R_3$$
$$=1+\frac{1}{2}x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+R_3=1+\frac{1}{2}(x-y)^2+R_3.$$