授業コード：73006-002,77112-002	参照物：無し	回収：解答用紙のみ

微積分学Ⅱ2中間試験 ’15.11/10

1．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = e^{-x}$ の一般解を求めよ．（10点）

2．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = -x + \cos t$ の一般解を求めよ．（10点）

（公式：$\displaystyle\int e^{at}\cos bt\,dt = \frac{e^{at}(a\cos bt + b\sin bt)}{a^2+b^2}$）

3．微分方程式 $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 0$ の一般解を求めよ．（10点）

4．初期値問題 $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 0, x(0) = 0, x'(0) = 1$ を解け．（10点）

5．曲面 $S : z = f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy - 2x + y$ を考える．

(1) 偏導関数 f_x, f_y を求めよ．（10点）

(2) S 上の点 $(1,2,1)$ における S の接平面の方程式を書け．（10点）

(3) S 上の点 $(1,2,1)$ における S の法線をパラメタ表示せよ．（10点）

6． $z = f(x,y),\ x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とするとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を計算せよ．（10点）

7．関数 $f(x,y) = \sin\left(x + 2y + \dfrac{\pi}{4}\right)$ について考える．

(1) 導関数 $f^{(1,0)}(x,y), f^{(0,1)}(x,y), f^{(2,0)}(x,y), f^{(1,1)}(x,y), f^{(0,2)}(x,y)$ を求めよ．（10点）

(2) 2次のマクローリン展開

$$f(x,y) = \frac{f^{(0,0)}}{0!0!} + \frac{f^{(1,0)}}{1!0!}x + \frac{f^{(0,1)}}{0!1!}y + \frac{f^{(2,0)}}{2!}x^2 + \frac{f^{(1,1)}}{1!1!}xy + \frac{f^{(0,2)}}{2!}y^2 + R_3$$

を計算せよ．剰余項 R_3 は具体的に求めなくてもよい．この式で，$f^{(i,j)}$ は $f^{(i,j)}(0,0)$ を略記したものである．（10点）

微積分学Ⅱ2中間試験 ’15.11/10解答

1．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=e^{-x}$ の一般解を求めよ．（10点）

<一般解＞ 変数分離した $e^x dx=dt$ を積分して， $e^x=\int e^x\,dx=\int dt=t+c$.

$$\therefore x=\log(t+c) \qquad (\,c\text{ は積分定数}).$$

＜特殊解＞ $e^{-x}\neq 0$ なので，特殊解は存在しない．念のため．

2．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=-x+\cos t$ の一般解を求めよ．（10点）

公式により， $x(t)=e^{-t}\left(\int e^t\cos t\,dt+C\right)=e^{-t}\left(\dfrac{e^t(\cos t+\sin t)}{2}+C\right)=\dfrac{\cos t+\sin t}{2}+Ce^{-t}$.

3．微分方程式 $x''(t)-4x'(t)+4x(t)=0$ の一般解を求めよ．（10点）

特性方程式 $\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2=0$ より，特性解は重解 $\lambda=2$ ．ゆえに，一般解は

$$x(t)=(at+b)e^{2t} \qquad (\,a,b\text{ は任意定数}).$$

4．初期値問題 $x''(t)-4x'(t)+4x(t)=0,\ x(0)=0,\ x'(0)=1$ を解け．（10点）

問３で求めた解 $x(t)=(at+b)e^{2t}$ を微分して， $x'(t)=(2at+a+2b)e^{2t}$ ．初期条件より，

$$\begin{cases} x(0)=b=0, \\ x'(0)=a+2b=1. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a=1, \\ b=0. \end{cases}$$

よって， $x(t)=te^{2t}$.

5．曲面 $S: z=f(x,y)=x^2-y^2+2xy-2x+y$ を考える．

(1) 偏導関数 f_x, f_y を求めよ．（10点）

$f_x=2x+2y-2$， $f_y=-2y+2x+1$.

(2) S 上の点 $(1,2,1)$ における S の接平面の方程式を書け．（10点）

$f_x(1,2)=4$， $f_y(1,2)=-1$ ゆえ，接平面の方程式は， $z=4(x-1)-(y-2)+1=4x-y-1$.

(3) S 上の点 $(1,2,1)$ における S の法線をパラメタ表示せよ．（10点）

法線ベクトルは $(-f_x(1,2),-f_y(1,2),1)=(-4,1,1)$ ．法線のパラメタ表示は，

$$(x,y,z)=(1,2,1)+t(-4,1,1) \ (-\infty<t<\infty).$$

6． $z=f(x,y),\ x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とするとき， $\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を計算せよ．（10点）

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=z_x\cos\theta+z_y\sin\theta,$$
$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=z_x(-r\sin\theta)+z_y(r\cos\theta)=-rz_x\sin\theta+rz_y\cos\theta.$$

7．関数 $f(x,y)=\sin\left(x+2y+\dfrac{\pi}{4}\right)$ について考える．

(1) 導関数 $f^{(1,0)}, f^{(0,1)}, f^{(2,0)}, f^{(1,1)}, f^{(0,2)}$ を求めよ．（10点）

$f^{(1,0)}(x,y)=\cos\left(x+2y+\dfrac{\pi}{4}\right),\ f^{(0,1)}(x,y)=2\cos\left(x+2y+\dfrac{\pi}{4}\right),$

$f^{(2,0)}(x,y)=-\sin\left(x+2y+\dfrac{\pi}{4}\right),\ f^{(1,1)}(x,y)=-2\sin\left(x+2y+\dfrac{\pi}{4}\right),\ f^{(0,2)}(x,y)=-4\sin\left(x+2y+\dfrac{\pi}{4}\right).$

(2) 2次のマクローリン展開

$$f(x,y)=\frac{f^{(0,0)}}{0!0!}+\frac{f^{(1,0)}}{1!0!}x+\frac{f^{(0,1)}}{0!1!}y+\frac{f^{(2,0)}}{2!}x^2+\frac{f^{(1,1)}}{1!1!}xy+\frac{f^{(0,2)}}{2!}y^2+R_3$$

を計算せよ．剰余項 R_3 は具体的に求めなくてもよい．この式で， $f^{(i,j)}$ は $f^{(i,j)}(0,0)$ を略記したものである．（10点）

$f^{(0,0)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, f^{(1,0)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, f^{(0,1)}=\sqrt{2}, f^{(2,0)}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, f^{(1,1)}=-\sqrt{2},\ f^{(0,2)}=-2\sqrt{2}$ を代入して，

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{0!0!}+\frac{1}{1!0!}x+\frac{2}{0!1!}y+\frac{-1}{2!}x^2+\frac{-2}{1!1!}xy+\frac{-4}{2!}y^2\right)+R_3\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+x+2y-\frac{1}{2}x^2-2xy-2y^2\right)+R_3.\end{aligned}$$